www.matematiques.com.br

ENSINO PERSONALIZADO

Cálculo I

3ª Lista de Exercícios – Limites

1) Calcule os limites:

$a)\lim\limits_{x\to 1}(4x^2-7x+5)$ $\quad b)\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{5-3x}$ $\quad c)\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x^2-2x-5}{-x^2+3x+4}\right)^3$

$d)\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{2x^2+3x-3}{5x-4}}$ $\quad e)\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{3x^3-5x^2-x+3}{4x+3}}$ $\quad f)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x+2}}{6-4x}$

Resp.: $a)\ 2 \quad b)\ 0 \quad c)\ 1/8 \quad d)\ 2/3 \quad e)\ \sqrt[3]{\dfrac{39}{5}} \quad f)\ -2$

2) Calcule os limites abaixo:

$a)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\quad b)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{2+x}$ $\quad c)\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2}$

$d)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ $\quad e)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{8+x^3}{4-x^2}$ $\quad f)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3-4x^2+8x-5}$

Resp.: $a)2 \quad b)4 \quad c)-7/3 \quad d)3/2 \quad e)3 \quad f)1$

3) Calcule:

$a)\lim\limits_{x\to 2}$ [redacted] $\quad b)\lim\limits_{x\to 1}$ [redacted] $\quad c)\lim\limits_{x\to 1}$ [redacted]

$d)\lim\limits_{x\to 0}$ [redacted] $\quad e)\lim\limits_{x\to -2}$ [redacted] $\quad f)\lim\limits_{x\to 3}$ [redacted]

$g)\lim\limits_{x\to 1}$ [redacted] $\quad h)\lim\limits_{x\to 1}$ [redacted]

Resp.: $a)+\infty \quad b)+\infty \quad c)-\infty \quad d)+\infty \quad e)\nexists \quad f)\nexists \quad g)\nexists \quad h)\nexists$

4) Calcule os limites:

$a)\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)$ $b)\lim\limits_{x\to-\infty}(4-5x)$ $c)\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^2-4x+3)$

$d)\lim\limits_{x\to+\infty}(4-x^2)$ $e)\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3-4)$

Resp.: $a)+\infty$ $b)+\infty$ $c)+\infty$ $d)-\infty$ $e)-\infty$

5) Calcule os limites:

$$a)\lim_{x\to+\infty}(3x^2-5x+2)$$

$$b)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10}\right)$$

$$j)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^3-6x+1}{6x^2+x+3}\right)$$

$$d)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1}\right)$$

$$e)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)$$

Resp.: $a)\infty$ $b)\infty$ $c)0$ $d)\infty$ $e)2/5$

$f)\infty$ $g)\infty$ $h)-2/3$

$$f)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-12x^3}{4x^2+12}\right)$$

$$g)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-6x}{4x-8}\right)$$

$$h)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}\right)$$

Exercícios Complementares

1. Calculando-se $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$, obtém-se

   a) 0.
   b) 1.
   c) 2.
   d) 4.
   e) 6.

2. O $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 9x}$ é igual a

   a) 1/9.
   b) 1/27.
   c) 1/243.
   d) 1/243.
   e) 1/54.

3. O valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$ é

   a) 0.
   b) 1.
   c) 2.
   d) 3.
   e) ∞.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[7 + \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x \right]$ vale

   a) 7*e*
   b) e^7
   c) 7 – *e*
   d) 7 + *e*
   e) 7^e

5. Julgue as afirmações abaixo e marque a alternativa **correta**.

   I) $\lim\limits_{x \to +\infty} 10^x = +\infty$

   II) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, se $0 < a < 1$

   III) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - x) = 0$

a) I, II e III são falsas.
b) Apenas as afirmações I e II são falsas.
c) I, II e III são verdadeiras.
d) Apenas as afirmações I e III são falsas.
e) Apenas as afirmações II e III são falsas.

6. Calculando-se $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1}$, obtém-se
a) 1/4.
b) 1/5.
c) 1/6.
d) 1/7.
e) 1/8.

7. Seja $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4}, & \text{se } x \geq 4 \\ k-2x, & \text{se } x < 4 \end{cases}$. O valor de *k* para oqual *f(x)* é contínua em x = 4 é
a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

8. Sobre a função $f(x) = \frac{x}{x+4}$ foram feitas as afirmações abaixo, sendo apenas uma verdadeira. Assinale-a:

a) Seu gráfico tem a reta *x = 4* como uma assíntota vertical.
b) Seu gráfico tem a reta *y = 0* como uma assíntota vertical.
c) Seu gráfico passa pelo ponto (0,0).
d) $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$
e) $\lim_{x\to -4^+} f(x) = 0$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\cos 2x}{x^2}$ é igual a
a) ∞.
b) 0.
c) 1.
d) - ∞.
e) 4.

10. Observando o gráfico correspondente à função *f(x)*, assinale a única alternativa **incorreta**:

EDUARDO CHAVES
ENSINO PERSONALIZADO

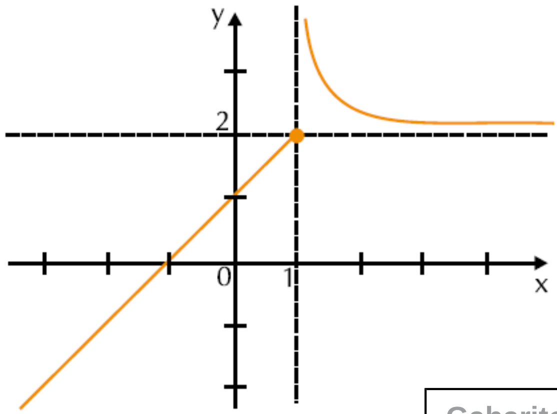
a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

e) f(1) = 2



Gabarito									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	E	B	D	E	C	D	C	A	C

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) $\lim\limits_{x \to 4}(x^2 - 5x + 3) = -1$

2) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x - 3}{x - 4} = \dfrac{7}{6}$

3) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{5x - 1}{x^2 + 3} - 8x\right) = -7$

4) Não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ pois $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{6}}{x - 2} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} = \dfrac{1}{4}$

7) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{x - 4}}{x} = \dfrac{1}{4}$

EXERCÍCIOS ESPECIAIS

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ RESP 0

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$ RESP -2

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$ RESP 1/3

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ RESP 1/2

EDUARDO CHAVES
ENSINO PERSONALIZADO

e) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ RESP $\frac{A-1}{3a^2}$

f) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ RESP $3X^2$

g) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right]$ RESP 1

h) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ RESP 1/2

i) $\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ RESP 3

j) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ RESP 1

k) $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ RESP -1/56

l) $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ RESP 12

m) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ RESP 3/2

n) $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ RESP -1/3

o) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ RESP 1

p) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ RESP $\frac{\sqrt{X}}{2}$: x

q) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$ RESP $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

r) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ RESP -1/3

LIMITES ENVOLVENDO INFINITOS

Seja a função polinomial $f(x) = a_n x^n + na_{-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1x + a_0$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$ Para o cálculo de limite com $x\to\pm\infty$ toma-se o termo de maior grau da função e aplica-se o limite .

Exemplos : $\lim_{x\to\infty}(2x^2+x-3) = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$

Exercícios complementares:

EDUARDO CHAVES
ENSINO PERSONALIZADO

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+4x^2-1}{3x^4+2x-2}$ R 0

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^4+x+3}{3x^4+x^3-1}$ R 4/3

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-x+3}{2x^2+3x-8}$ R ∞

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+2x-1}}{2x^2-1}$ R ½

LIMITES DE FUNÇÕES

Seja $f(x)$ uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a\` , exceto possivelmente no próprio a\` . Então, diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende a a\` $(x \to a)$ é L , e representa-se por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se $0 < |x - a| < \delta$ para todo $\varepsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$, isto é, se $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Exemplo: Provar que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

Solução:

(a) **Encontrar um valor para δ :**

Uma análise preliminar do problema indica que se $\varepsilon > 0$, deve encontrar-se um δ tal que

$$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 3| < \delta ,$$

mas

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| \Rightarrow 4|x - 3| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 3| < \delta ,$$

isto é,

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ sempre que } 0 < |x - 3| < \delta \text{ , logo } \delta = \frac{\varepsilon}{4} .$$

(b) Prova:

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, escolhe-se $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, e se $0 < |x - 3| < \delta$, então,

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| \Rightarrow 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

Assim

$$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 3| < \delta ,$$

por tanto

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Na prática é suficiente substituir a variável pelo valor ao qual ela tende, isto é,

$$x \to 3$$

donde

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 4 \cdot 3 - 5 = 12 - 5 = 7$$

Exemplos:

a) $\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$

b) $\lim_{x \to 4} (5x+7) = 5 \times 4 + 7 = 27$

c)

Em alguns exemplos o limite não é tão evidente. Seja a função

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2}$$, com $x \to 2$, isto é,

$$f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$$ **Indeterminação**,

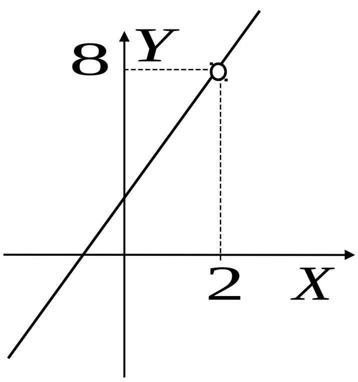
estudando-se esta função, tem-se que o domínio de $f(x)$ abrange todos os números reais, com exceção de $x=2$ que anula o denominador e o numerador. O que significa que a função é indefinida neste ponto. Porém, ao se utilizar “Baskara” no numerador, ou seja,

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2/3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2} = \frac{(3x + 2)(x - 2)}{x - 2} = 3x + 2$$



$f(x) = 3x + 2 \quad x \neq$ Ponto $(2, 8)$ deve ser excluído do gráfico, pois naquele ponto a função é indefinida.

O gráfico mostra que para x aproximando de 2, $f(x)$ se aproxima de 8, mas se substituir-se $x=2$ na 1ª expressão, $f(x)$ não está definida naquele ponto.

Desta forma, tem-se que

$$f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}3x+2=8\ ,$$

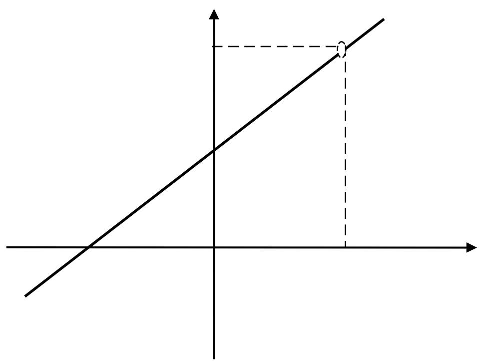
Exercícios:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{0}{0}$$ **Indeterminação**,

onde substituição direta novamente anula o denominador e o numerador, e a função é indefinida neste ponto. Porém, obtendo-se as raízes do numerador, ou seja,

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8 \ \Rightarrow\ y=x+4$$

Em $f(x)=x+4$, o ponto $(4\ ,\ 8)$ deve ser excluído do gráfico, pois $x\neq 4$, pois o domínio de $f(x)$ é:
$D:\{x\in\Re\ /\ (-\infty,4)\cup(4,\infty)\}$ e tem como imagem
$I:\{y\in\Re\ /\ (-\infty,8)\cup(8,\infty)\}$.



3.1 - Propriedades dos Limites

1) $\lim_{x\to a}[u\pm v]=\lim_{x\to a}(u)\pm\lim_{x\to a}(v)\quad para\ u=u(x)\ e\ \ v=v(x)$

2) $\lim_{x\to a}[C\ (u)]=C\lim_{x\to a}(u)\quad para\ u=u(x)$ e C é uma constante

3) $\lim_{x\to a}[u\cdot v]=\lim_{x\to a}(u)\cdot\lim_{x\to a}(v)\quad para\ u=u(x)\ e\ \ v=v(x)$

4) $\lim_{x\to a}\left[\frac{(u)}{(v)}\right]=\frac{\lim_{x\to a}(u)}{\lim_{x\to a}(v)}\quad para\ u=u(x)\ e\ \ v=v(x)$

5) $\lim\limits_{x\to a}(u^m)=\left[\lim\limits_{x\to a}(u)\right]^m$ *para* $u=u(x)$

6) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[m]{u}=\sqrt[m]{\lim\limits_{x\to a}(u)}$ *para* $u=u(x)$

7) $\lim\limits_{x\to a}(\log_a u)=\log_a\left[\lim\limits_{x\to a}(u)\right]$ *para* $u=u(x)$

8) $\lim\limits_{x\to a}(u^v)=\left[\lim\limits_{x\to a}(u)\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v)}$ *para* $u=u(x)$ *e* $v=v(x)$

9) $\frac{0}{\infty}=0,\ 0^{+\infty}=0,\ 0^{-\infty}=+\infty,\ (+\infty)^{+\infty}=+\infty,$ e $(+\infty)^{-\infty}=0,\ (\pm\infty)^{+k}=\pm\infty,\ (\pm\infty)^{-k}=0$

10) **Indeterminações de limites**: $\infty-\infty,\ \infty\times 0,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty^0,\ 0^0,\ 1^{\pm\infty}$

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{8x+1}}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-1}=\frac{0}{0}$ **Indeterminação**

Como toda indeterminação deve ser levantada, tem-se

Solução: Deve-se, primeiramente, encontrar as raízes do polinômio superior, isto é,

$$x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} \quad \text{(Baskara)}$$

$$x=\frac{-4\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

$$ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

donde,

$$\lim_{z \to -1} \frac{(z+1)(z+3)}{(z^2-1)}$$

Então, deve-se encontrar as raízes do polinômio inferior, isto é,

$$z^2-1=0 \;\Rightarrow\; z^2=1 \;\Rightarrow\; z=\pm 1 \;\Rightarrow\; z^2-1=(z-1)(z+1)$$

assim,

$$\lim_{z \to -1} \frac{(z+1)(z+3)}{(z-1)(z+1)} = \lim_{z \to -1} \frac{(z+3)}{(z-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

3) $$\lim_{x \to 3} \left| \frac{x^2-5x+6}{x-3} \right| = \frac{0}{0} \;\Rightarrow\; \left| \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} \right| = \left| \lim_{x \to 3} (x-2) \right| = 1$$

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{0}{0}$$ **Indeterminação**

Neste caso, para eliminar a indeterminação $\frac{0}{0}$, se deve racionalizar o numerador , isto é, $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$. Desta forma, tem-se:

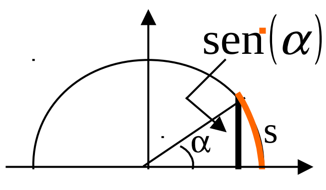
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{[\sqrt{4+x}-2][\sqrt{4+x}+2]}{x\sqrt{4+x}+2} = \lim_{x \to 0} \frac{4+x-4}{x\sqrt{4+x}+2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x\sqrt{4+x}+2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}$$

3.2 - Limites Notáveis

Um limite considerado notável é o do seno, que ocorre porque quando o ângulo (ou arco) α tende a diminuir, o valor do $\operatorname{sen}(\alpha)$ tende a ficar igual a este arco, em valor, de forma que o seu quociente tenda para 1 , e o limite notável no caso é

3.2.1 - Limite do seno



, se

6) Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} \qquad \text{faz-se } 5x=t \Rightarrow x=\frac{t}{5}, \text{ para } x\to 0 \Rightarrow t\to 0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t/5}=\lim_{t\to 0}\frac{5\operatorname{sen}(t)}{t}=5\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}=5\cdot(1)=5$$

7) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\times 2x}{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}\times 3x}=\frac{(1)\cdot(2x)}{(1)\cdot(3x)}=\frac{2}{3}$$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)=(1)\cdot\left(\frac{1}{1}\right)=1$$

Limite que define o número “e ”

O número "e" , usado como base do logaritmo natural é obtido pela expressão abaixo.

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

x	y
1	2
10	2,5937
100	2,7048
1000	2,7169
10000	2,7181
$x\to\infty$	$e=2,7182818\ldots$

Exemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a \quad \text{põe-se } \frac{a}{x}=\frac{1}{z} \Rightarrow x=az \text{ para } x\to\infty \Rightarrow z\to\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{az}=\left[\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{a}=e^{a}$$

Limites infinitos de funções racionais

Se a função for do tipo $y=\lim_{x\to\infty}[P(x)/Q(x)]$, isto é,

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0}\right)=\frac{\infty}{\infty} ,$$

que é uma indeterminação. E para resolver esta indeterminação, basta dividir o numerador e o denominador pela variável independente elevada à maior potência que aparecer na fração. Assim, se $n>m$, tem-se:

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{x^n}}{\dfrac{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0}{x^n}}\right) ,$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{a_n x^n}{x^n}+\dfrac{a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}+\dfrac{a_{n-2}x^{n-2}}{x^n}+\cdots+\dfrac{a_2x^2}{x^n}+\dfrac{a_1x}{x^n}+\dfrac{a_0}{x^n}}{\dfrac{b_m x^m}{x^n}+\dfrac{b_{m-1}x^{m-1}}{x^n}+\dfrac{b_{m-2}x^{m-2}}{x^n}+\cdots+\dfrac{b_2x^2}{x^n}+\dfrac{b_1x}{x^n}+\dfrac{b_0}{x^n}}\right) ,$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\dfrac{a_{n-2}}{x^2}+\cdots+\dfrac{a_2}{x^{n-2}}+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{\dfrac{b_m}{x^{n-m}}+\dfrac{b_{m-1}}{x^{n-m+1}}+\dfrac{b_{m-2}}{x^{n-m+2}}+\cdots+\dfrac{b_2}{x^{n-2}}+\dfrac{b_1}{x^{n-1}}+\dfrac{b_0}{x^n}}\right) ,$$

e passando ao limite, tem-se:

$$y=\frac{a_n+0+0+\cdots+0+0+0}{0+0+0+\cdots+0+0+0}=\frac{a_n}{0}=\infty .$$

Se $m>n$, tem-se: $y=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\dfrac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{x^m}}{\dfrac{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0}{x^m}}\right)$,

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{a_n x^n}{x^m}+\dfrac{a_{n-1}x^{n-1}}{x^m}+\dfrac{a_{n-2}x^{n-2}}{x^m}+\cdots+\dfrac{a_2x^2}{x^m}+\dfrac{a_1x}{x^m}+\dfrac{a_0}{x^m}}{\dfrac{b_m x^m}{x^m}+\dfrac{b_{m-1}x^{m-1}}{x^m}+\dfrac{b_{m-2}x^{m-2}}{x^m}+\cdots+\dfrac{b_2x^2}{x^m}+\dfrac{b_1x}{x^m}+\dfrac{b_0}{x^m}}\right),$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{a_n x^n}{x^{m-n}}+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-m+1}}+\dfrac{a_{n-2}}{x^{n-m+2}}+\cdots+\dfrac{a_2}{x^{m-2}}+\dfrac{a_1}{x^{m-1}}+\dfrac{a_0}{x^m}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\dfrac{b_{m-2}}{x^2}+\cdots+\dfrac{b_2}{x^{m-2}}+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}}\right),$$

e passando ao limite, tem-se:

$$y=\frac{0+0+0+\cdots+0+0+0}{b_m+0+0+\cdots+0+0+0}=\frac{0}{b_m}=0\ .$$

Se $n=m$, tem-se:

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{x^n}}{\dfrac{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0}{x^n}}\right),$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{x^n}}{\dfrac{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0}{x^n}}\right),$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{a_n x^n}{x^n}+\frac{a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}+\frac{a_{n-2}x^{n-2}}{x^n}+\cdots+\frac{a_2x^2}{x^n}+\frac{a_1x}{x^n}+\frac{a_0}{x^n}}{\frac{b_n x^n}{x^n}+\frac{b_{n-1}x^{n-1}}{x^n}+\frac{b_{n-2}x^{n-2}}{x^n}+\cdots+\frac{b_2x^2}{x^n}+\frac{b_1x}{x^n}+\frac{b_0}{x^n}}\right),$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}}{b_n+\frac{b_{n-1}}{x}+\frac{b_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{b_2}{x^{n-2}}+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{x^n}}\right),$$

e passando ao limite, tem-se: $y=\frac{a_n+0+0+\cdots+0+0+0}{b_n+0+0+\cdots+0+0+0}=\frac{a_n}{b_n}$.

Desta forma, pode colocar-se a regra geral: **Independente de qual dos três casos for considerado, todos os limites menos os de maior expoente, tanto no dividendo quanto no divisor irão anular-se**, ou seja,

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0}\right)$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_nx^n+0+0+\cdots+0+0+0}{b_mx^m++0+0+\cdots+0+0+0}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right).$$

Assim, se $n>m \Rightarrow y=\infty$, se $n=m \Rightarrow y=\frac{a_n}{b_m}$ e se $m>n \Rightarrow y=0$.

Exemplos:

1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{2x^2-3}\right)$, o resultado daria $\frac{\infty}{\infty}$ (indeterminação)

Aplicando a técnica exposta anteriormente se tem:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{5x^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{2-\frac{3}{x^2}}\right)=\frac{5}{2-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{5}{2-0}=\frac{5}{2},$$

ou simplesmente

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{2x^2-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{2x^2}\right)=\frac{5}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\frac{5}{2}\lim_{x\to\infty}(1)=\frac{5}{2}$$

2) Calcular o limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)=\frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1+0}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

ou

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

3) Calcular o limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{\sqrt[3]{7x^3+3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt[3]{7x^3+3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}(7x^3+3)}}\right)=\frac{5}{\sqrt[3]{7+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}}=\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$$

ou

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{\sqrt[3]{7x^3+3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{\sqrt[3]{7x^3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{\left(\sqrt[3]{7}\right)\sqrt[3]{x^3}}\right)=\frac{5}{\sqrt[3]{7}}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}\right)=\frac{5}{\sqrt[3]{7}}\lim_{x\to\infty}(1)=\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$$

4) Calcular o limite

$$\lim_{x\to\infty}(7x^2+3x^3)=\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(\frac{7x^2}{x^3}+\frac{3x^3}{x^3}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(\frac{7}{x}+3\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x^3(0+3)\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^3(0+3)\right]=\lim_{x\to\infty}(3x^3)=3\lim_{x\to\infty}x^3=(3)\cdot(\infty)=\infty$$

ou simplesmente

$$\lim_{x\to\infty}(7x^2+3x^3)=7\lim_{x\to\infty}(x^2)+3\lim_{x\to\infty}(x^3)=\infty+\infty=\infty$$

Limites Laterais

a) **Definição:** Diz-se que o limite esquerdo de $f(x)$ quando x tende a a (ou que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda) é L e representa-se por

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

se for considerado que x tende a a pela esquerda, isto é, $x<a$.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\tan(x)\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right]=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}=\dfrac{1}{+0}=+\dfrac{1}{0}=+\infty$

b) **Definição:** Diz-se que o limite direito de $f(x)$ quando x tende a a (ou que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita) é L e representa-se por

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

se for considerado que x tende a a pela esquerda, isto é, $x<a$.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left[\tan(x)\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right]=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}^+\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}^+\right)}=\dfrac{1}{-0}=-\dfrac{1}{0}=-\infty$

EXERCÍCIOS:

2) **Resolver os limites abaixo:**

11. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

16. $\lim_{h \to 0^-} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$

12. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

17. $\lim_{h \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4-h}}{h}$

13. $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

18. $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{\dfrac{x-4}{6x^2 + 2}}$

19. $\lim_{y \to 0} (1 + ay)^{1/y}$

14. $\lim_{y \to 0} (1 + y)^{1/y}$

15. $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x}{\sqrt[3]{7x^3 + 3}} \right)$

20) $\lim_{x \to \infty} (7x^2 + 3x^3)$