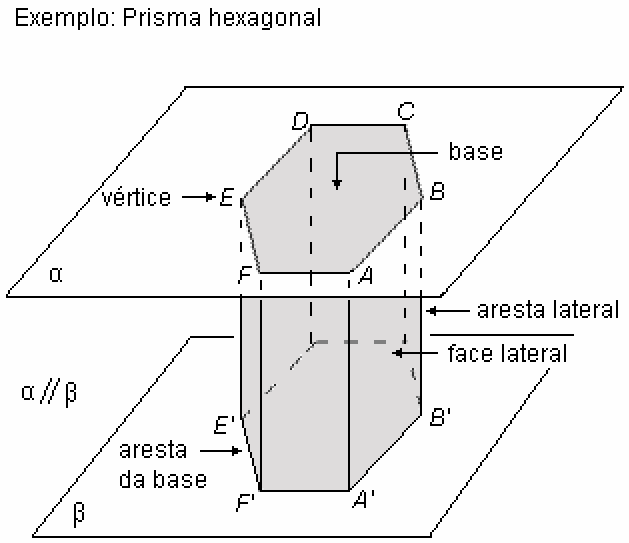
GEOMETRIA ESPACIAL

PRISMAS

Dados um polígono *ABC…MN* situado num plano α e outro polígono *A'B'C'..M'N'* congruente ao primeiro e situado num plano paralelo β (β ≠ α), chama-se prisma o sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade num ponto de *ABC…MN* ou em sua região interna e outra num ponto de *A'B'C'…M'N'* ou em sua região interna.



Elementos, denominação e classificação

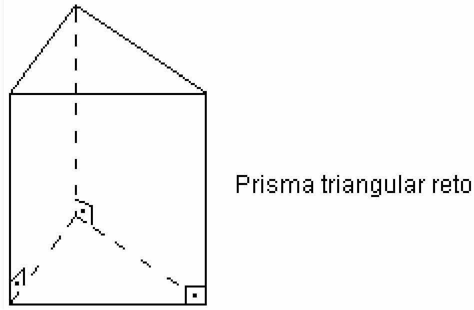
No prisma do exemplo acima, destacamos:

- α e β são os planos paralelos das bases;
- Os hexágonos congruentes *ABCDEF* ⊂ α e *A'B'C'D'E'F'* ⊂ β são as bases do prisma;
- Os paralelogramos A'ABB', B'BCC', C'CDD',…, F'FAA' são as faces laterais do prisma;
- Os lados dos polígonos das bases: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, …, $\overline{FA}$, $\overline{A'B'}$,…, $\overline{E'F'}$, $\overline{F'A'}$ são as arestas das bases;
- A, B, C…,F, A', B', …, F' são os vértices do prisma;
- Os prismas são designados de acordo com o número de lados dos polígonos das bases:

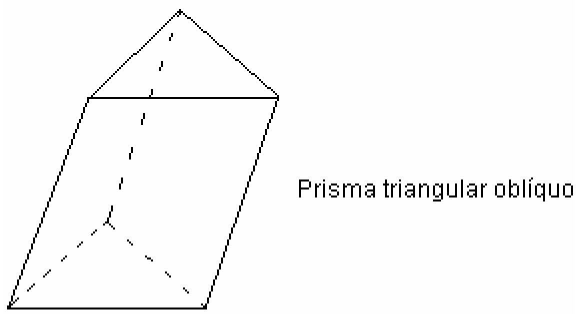
base	***prisma***
triângulo	triangular
quadrilátero	quadrangular
pentágono	pentagonal
hexágono	hexagonal

e assim por diante;

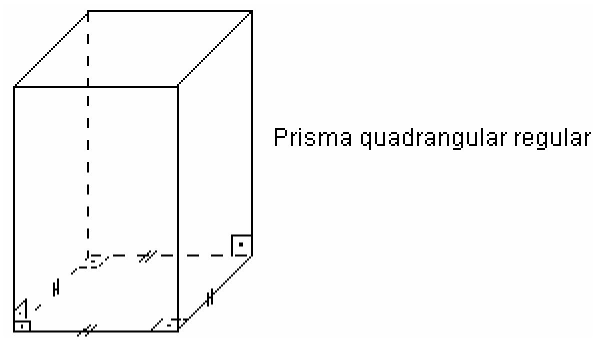
- Se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, o prisma é *reto*. Exemplo:



- Se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases, o prisma é dito *oblíquo*.



- O prisma será *regular* se for reto e sua base for um polígono regular.



- Altura do prisma é a distância entre os planos das bases.

Área da base (A_B)

É a área de um das bases do prisma.

Área lateral (A_L)

É soma das áreas das faces laterais.

Área total (A_T)

É a soma das áreas de todas as faces do prisma.

$$\boxed{A_T = A_L + 2.A_B}$$

Volume (V)

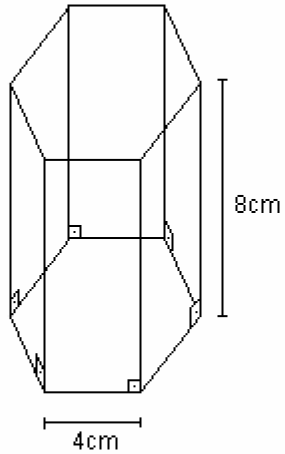
O volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela altura:

$$\boxed{V = A_B.h}$$

Vamos resolver!

01. Dado o prisma hexagonal regular da figura abaixo, calcule:

a) o apótema da base
b) a área total
c) o volume

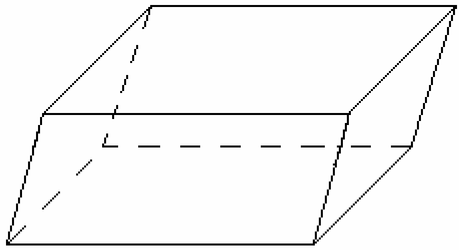


02. (MACK-SP) A área total de um prisma triangular regular cujas arestas são todas congruentes entre si e cujo volume é $54\sqrt{3}$ vale:

A) $18\sqrt{3}+108$
B) $108\sqrt{3}+18$
C) $108\sqrt{3}-18$
D) $54\sqrt{3}+16$
E) $36\sqrt{3}+12$

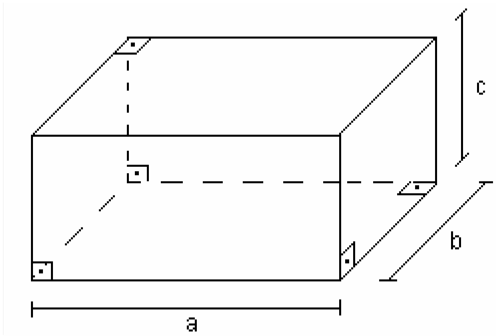
Paralelepípedos

Paralelepípedo é um prisma cujas faces são paralelogramos.



● A área total do paralelepípedo é a soma das áreas dos seis paralelogramos;

● Se as faces laterais de um paralelepípedo são retangulares, então ele é chamado de paralelepípedo reto-retângulo;



● A área total de um paralelepípedo retângulo é dada por:

$$\boxed{A_T = 2.(ab + ac + bc)}$$

● O volume do paralelepípedo retângulo é dado por:

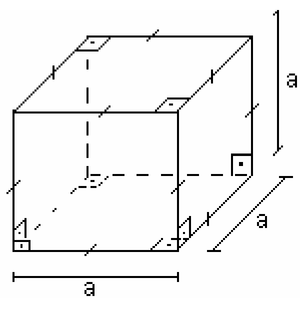
$$\boxed{V = a.b.c}$$

● A diagonal de um paralelepípedo retângulo é dado por:

$$\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Cubo

É um paralelepípedo que possui todas as faces quadradas.



- Num cubo, como as faces são quadradas, todas as arestas são congruentes;

- A área total de um cubo é dada por:

$$\boxed{A_T = 6.a^2}$$

onde **a** é a medida de sua aresta.

- O volume de um cubo é dado por:

$$\boxed{V = a^3}$$

- A diagonal de um cubo é dado por:

$$\boxed{D = a\sqrt{3}}$$

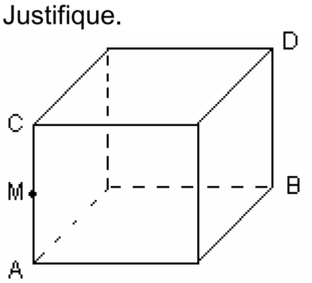
Vamos resolver!

03. (FUVEST) No cubo de aresta 1, considere as arestas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e o ponto médio M de $\overline{AC}$.

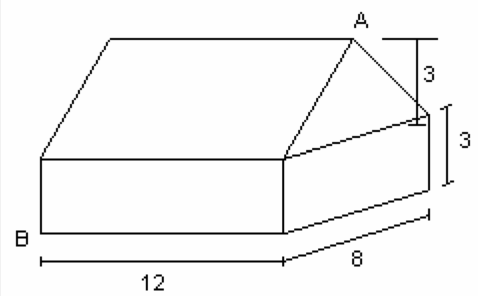
a) Determine o cosseno do ângulo $B\hat{A}D$.

b) Determine o cosseno do ângulo $B\hat{M}D$.

c) Qual dos ângulos, $B\hat{A}D$ ou $B\hat{M}D$ é maior? Justifique.



04. (UFPE/02) A figura abaixo ilustra uma casa, onde os comprimentos estão medidos em metros. Qual a distância, em metros, entre os pontos A e B?



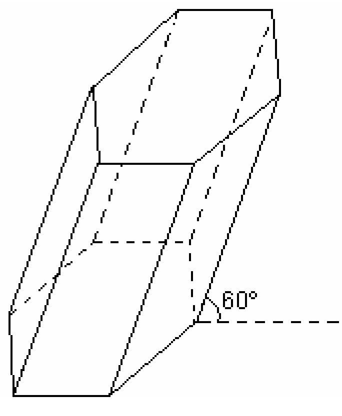
O formato desta casa consiste de um prisma reto de altura 12m, tendo por base um triângulo isósceles de base 8m e altura 3m e um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 8m, 12m e 3m. A face retangular de dimensões 8m e 12m do prisma coincide com a face do paralelepípedo.

A) 13
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17

05. (UEFS/06) Um reservatório na forma de um paralelepípedo reto retangular, que tem 10m de comprimento, 15m de largura e 3m de altura, está completamente cheio de água. Após serem utilizados 180000 litros, o nível da água restante no reservatório a tingirá a altura de

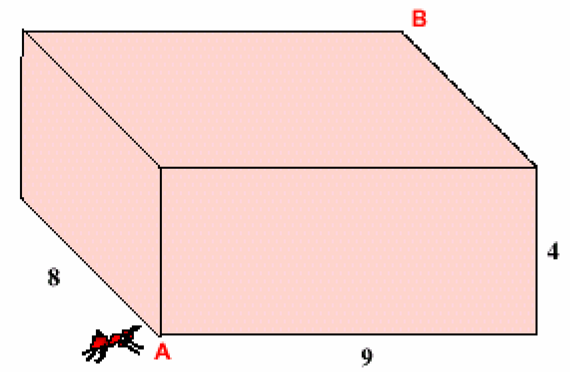
A) 1,2m
B) 1,6m
C) 1,8m
D) 2,10m
E) 2,40m

06. Calcule o volume do prisma oblíquo indicado abaixo, sabendo que a base é um hexágono regular de aresta 2m e que a aresta lateral mede 6m e faz um ângulo de 60º com o plano da base



Resolva em casa!

07. (UFPE) Uma formiga (ignore seu tamanho) encontra-se no vértice **A** do paralelepípedo reto ilustrado abaixo. Qual a menor distância que ela precisa percorrer para chegar ao vértice **B** (caminhando sobre a superfície do paralelepípedo)?



08. (UFPE) Dois cubos C_1 e C_2 são tais que a aresta de C_1 é igual à diagonal de C_2. Se V_1 e V_2 são, respectivamente, os volumes dos cubos C_1 e C_2, então, a razão V_1 / V_2 é igual a:

A) $\sqrt[3]{3}$
B) $\sqrt{27}$
C) $\dfrac{1}{\sqrt{27}}$
D) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$
E) $\sqrt[3]{9}$

09. (UFPE/04) Um cubo tem aresta $2^3.3^2$. Para quantos naturais **n**, este cubo pode ser dividido em (mais de um) cubos congruentes de aresta **n**?

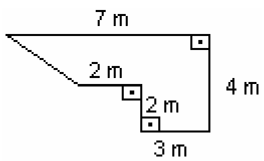
A) 7
B) 9
C) 11
D) 13
E) 15

10. (ITA/05) Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7200º. O número de vértices deste prisma é igual a

A) 11.
B) 32.
C) 10.
D) 20.
E) 22.

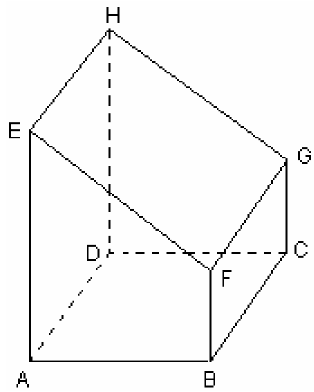
11. (UPE/07) Um prisma com 3m de altura tem seção transversal, como se mostra na figura ao lado. Calcule o volume, em m³, deste prisma.

A) 24
B) 30
C) 36
D) 48
E) 54



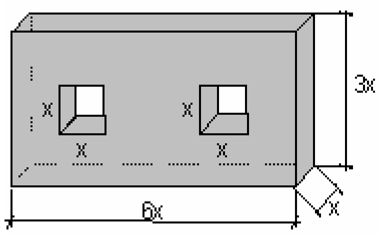
12. (UPE/01) O tronco de prisma reto, figura abaixo, tem por base um quadrado inscrito num círculo de raio $2\sqrt{2}$ cm. A altura maior mede 10cm e a altura menor mede 7cm. Podemos afirmar que

A) a área lateral do tronco é 120cm²
B) a área total do tronco é 158cm²
C) a área lateral do tronco é 162cm²
D) o volume do tronco é 160cm³
E) volume do tronco é 136cm³



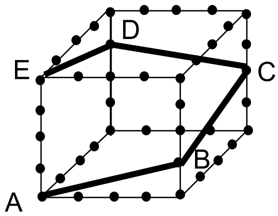
13. (UFPE/03) De um paralelepípedo reto-retângulo com dimensões **x**, **3x** e **6x,** são removidos dois cubos de aresta **x**, como indicado na figura. Qual o comprimento da aresta do cubo cujo volume é igual ao do sólido resultante?

A) $2\sqrt[3]{2}x$
B) $3\sqrt{2}x$
C) 4x
D) $3\sqrt[3]{2}x$
E) $2\sqrt[3]{3}x$



14. (UECE/02) Na figura, as arestas do cubo medem 1m e estão divididas em 4 parte iguais. A poligonal ABCDE construída sobre as faces do cubo mede:

A) $\sqrt{13}$ m
B) $\sqrt{15}$ m
C) $\sqrt{17}$ m
D) $\sqrt{19}$ m



15. (UNEB/06) Um paralelepípedo retângulo tem 132m² de área total, e as medidas suas arestas são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 3. Com base nessas informações, pode-se afirmar que o volume desse paralelepípedo mede, em m³,

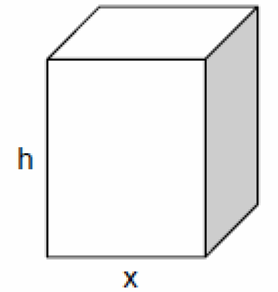
01) 100
02) 90
03) 85
04) 80
05) 60

16. (UNEB/07) Quatro quadrados iguais são recortados dos cantos de um papelão retangular de 30 cm de comprimento por 20 cm de largura. Dobrando-se as abas para cima, tem-se uma caixa, sem tampa, cujo volume é uma função da largura dos quadrados recortados. O domínio dessa função é

01) $\{x \in R;\ x > 15\}$
02) $\{x \in R;\ x > 10\}$
03) $\{x \in R;\ 10 < x < 15\}$
04) $\{x \in R; 0 < x < 15\}$
05) $\{x \in R; 0 < x < 10\}$

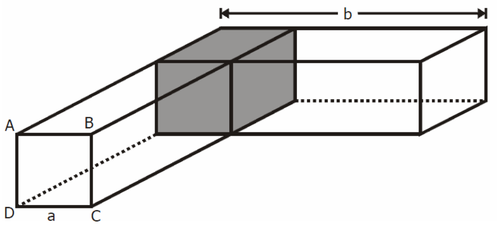
17. (UNIVASF/09) Um paralelepípedo reto de base quadrada, como o ilustrado a seguir, deve ser construído de tal modo que a soma das suas arestas seja 36cm, e a área total de sua superfície seja máxima. Qual o volume do paralelepípedo?

A) $29cm^3$
B) $28cm^3$
C) $27cm^3$
D) $26cm^3$
E) $25cm^3$



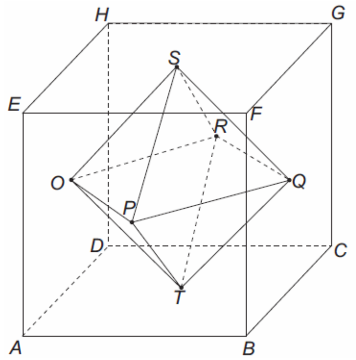
18. (MACK/2008) Dois paralelepípedos retângulos de mesmas dimensões cortam-se conforme a figura, sendo igual a 1 o volume da região assinalada. Se ABCD é um quadrado, e o volume total do sólido obtido, incluindo a região assinalada, é 9, a dimensão b é igual a:

A) 2
B) 6
C) 5
D) 3
E) 4



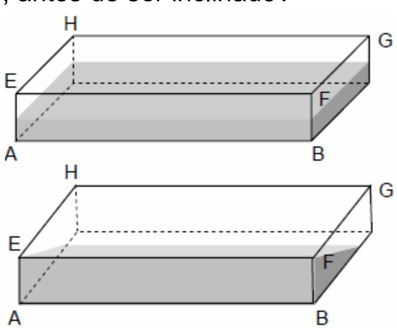
19. (UFMG/2008) Nesta figura, estão representados o cubo ABCDEFGH e o sólido OPQRST. Cada aresta do cubo mede 4 cm e os vértices do sólido OPQRST são os pontos centrais das faces do cubo. Então, é CORRETO afirmar que a área lateral total do sólido OPQRST mede

A) $8\sqrt{2}$ cm²
B) $8\sqrt{3}$ cm²
C) $16\sqrt{2}$ cm²
D) $16\sqrt{3}$ cm²



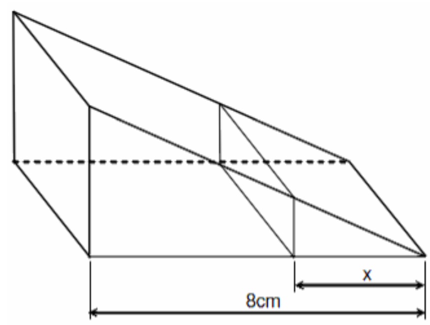
20. (UNIVASF/08.2) Um reservatório tem a forma de um paralelepípedo reto, ABCDEFGH, com 5m de comprimento, 3m de profundidade e 0,8m de altura. Ele está preenchido com água até certa altura. Quando inclinado até que o nível de água atinja a aresta EH, três quartos da base ficam cobertos com água, como ilustrado a seguir. Qual a altura da água no reservatório, antes de ser inclinado?

A) 0,3m
B) 0,4m
C) 0,5m
D) 0,6m
E) 0,7m



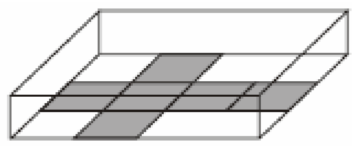
21. (UNIVASF/07) Um pedaço de queijo tem a forma de um prisma triangular reto tendo por base um triângulo com um dos lados medindo 8cm, como ilustrado a seguir. O queijo deve ser dividido em dois pedaços de mesmo volume por um plano paralelo a uma das faces, como ilustrado acima. Qual o valor de x?

A) $2^{5/2}$cm
B) $2^{3/8}$cm
C) 4 cm
D) $2^{4/3}$cm
E) 5 cm



22. (UESB/2007) Uma empresa prepara caixas em forma de cubos, com volume $V=343cm^3$. Para economizar espaço, elas ficam desmontadas e guardadas em uma gaveta, como mostra a figura. Nessas condições, pode-se concluir que a área da base da gaveta, em cm², é igual a:

A) 588
B) 392
C) 196
D) 441
E) 294

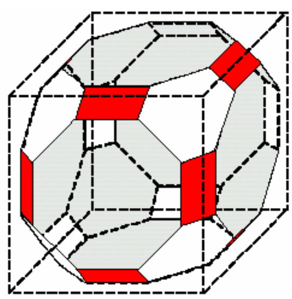


23. (UFPE) Qual o número de lados das faces de um poliedro regular com 20 vértices e 30 arestas?

24. (UNICAP) Um dodecaedro convexo possui todas as faces pentagonais. Determine o número de vértices do poliedro.

25. (UFPE) O sólido convexo da figura abaixo é obtido de um cubo, construindo octógonos em suas faces e unindo os vértices dos octógonos de forma a se obter um sólido com seis faces octogonais, oito faces hexagonais e doze faces retangulares. Indique a soma dos dígitos do número de diagonais do sólido.

Nota: uma diagonal de um poliedro é um segmento unindo dois vértices que não é aresta nem diagonal da face do sólido.



26. (UNICAP) Com base na geometria euclidiana no espaço, considere as afirmativas a seguir:

I II

0 0 Uma mesa com quatro pernas, mesmo apoiada em um piso plano, pode balançar, porque há a possibilidade da extremidade de uma das pernas não pertencer ao plano determinado pelas extremidades das outras três pernas.

1 1 Existe sempre um plano que contém duas retas reversas.

2 2 Por uma reta não perpendicular a um plano, passa um único plano perpendicular ao plano dado.

3 3 Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a qualquer reta do plano.

4 4 Se duas retas **r** e **s** são reversas e formam um ângulo reto, existe uma reta **t** paralela a uma delas e perpendicular à outra.

27. (UPE/02) Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que podem ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças. Quantas são as costuras feitas na fabricação da bola de futebol?

A) 60.
B) 64.
C) 90.
D) 120.
E) 180.

28. (UFBA/09) Em relação a um prisma pentagonal regular, é correto afirmar:

(01) O prisma tem 15 arestas e 10 vértices.

(02) Dado um plano que contém uma face lateral, existe uma reta que não intercepta esse plano e contém uma aresta da base.

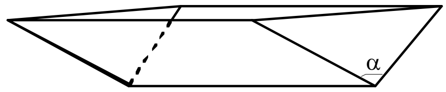
(04) Dadas duas retas, uma contendo uma aresta lateral e outra contendo uma aresta da base, elas são concorrentes ou reversas.

(08) A imagem de uma aresta lateral por uma rotação de 72º em torno da reta que passa pelo centro de cada uma das bases é outra aresta lateral.

(16) Se o lado da base e a altura do prisma medem, respectivamente, 4,7cm e 5,0cm, então a área lateral do prisma é igual a 115cm².

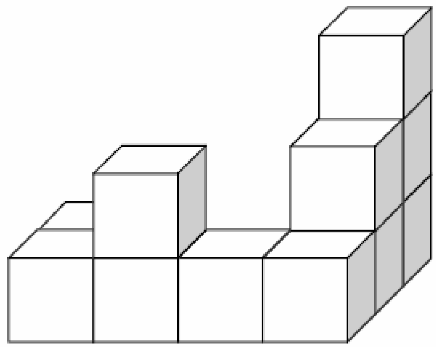
(32) Se o volume, o lado da base e a altura do prisma medem, respectivamente, 235,0cm³, 4,7cm e 5,0cm, então o raio da circunferência inscrita na base desse prisma mede 4,0cm.

29. (UNIVASF/08-2ª fase) Uma calha tem a forma de um prisma reto de base triangular. A altura do prisma é 1m, e sua base é um triângulo isósceles com lados congruentes, medindo 0,4m e formando entre si um ângulo α. Fazendo a escolha apropriada, qual o maior volume, em litros, que a calha pode ter?



30. (UPE/09) Onze cubinhos, todos possuindo a mesma aresta, foram colados, conforme a figura a seguir. O menor número de cubinhos, iguais aos já utilizados, que devem ser agregados ao sólido formado pelos onze cubinhos, para obtermos um cubo maciço, é igual a

A) 48
B) 49
C) 52
D) 53
E) 56



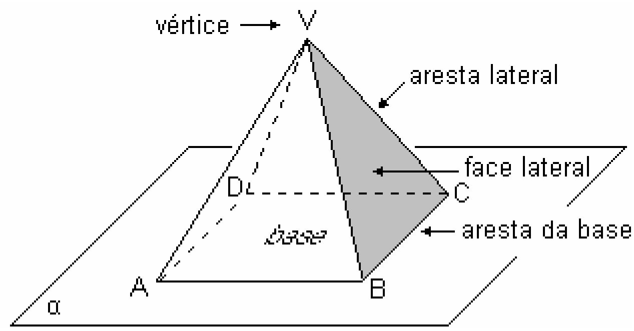
GABARITO-RESOLVA EM CASA

07	15	**15**	05	**23**	05
08	B	**16**	05	**24**	20
09	C	**17**	C	**25**	12
10	E	**18**	C	**26**	v,f,v,f,v
11	E	**19**	D	**27**	C
12	E	**20**	A	**28**	45
13	A	**21**	A	**29**	80
14	A	**22**	A	**30**	D

PIRÂMIDE

Considere um polígono *ABC…MN*, contido num plano α, e um ponto V não pertencente a α. Chama-se pirâmide à reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e outra num ponto qualquer de *ABC…MN* ou de sua região interna.

Exemplo: Pirâmide quadrangular



Denominação

As pirâmides são denominadas de acordo com o polígono da base:

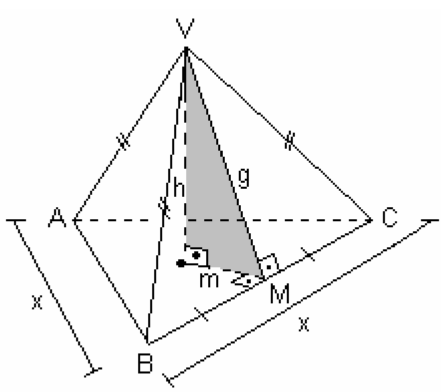
base	*pirâmide*
triângulo	triangular
quadrilátero	quadrangular
pentágono	pentagonal
hexágono	hexagonal

e assim por diante;

Pirâmide regular

É uma pirâmide que tem como base um polígono regular e cuja projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base coincide com o centro da base.

Exemplo: Pirâmide triangular regular

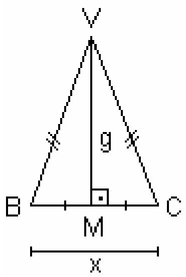


Na pirâmide regular da figura:

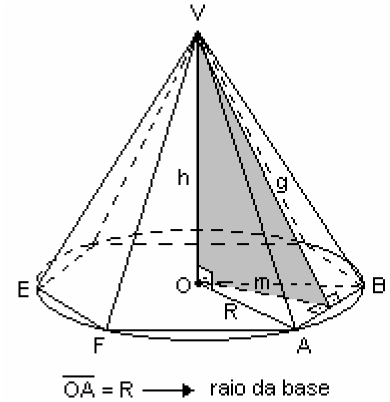
- **g** é o apótema da pirâmide (altura de uma face lateral relativa à base);
- **m** é o apótema da base (apótema do polígono regular da base);
- **h** é a altura da pirâmide;
- As arestas laterais são congruentes, portanto as faces laterais são triângulos isósceles congruentes;
- A área de uma face lateral é dada por:

$$\boxed{A_{F.L.} = \frac{x.g}{2}}$$

Veja uma face lateral da pirâmide da figura!



- Numa pirâmide regular, o polígono da base é regular, portanto, inscritível numa circunferência de raio R, chamado raio da base, veja no exemplo abaixo:



Área da base (A_B)

É a área do polígono da base da pirâmide.

Área lateral (A_L)

É soma das áreas das faces laterais.

Área total (A_T)

É a soma das áreas de todas as faces da pirâmide.

$$\boxed{A_T = A_B + A_L}$$

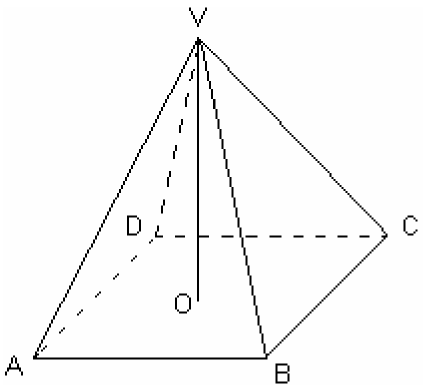
Volume (V)

O volume da pirâmide é dado pela expressão:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}.A_B.h}$$

Vamos resolver!

31. (UPE/07) Na pirâmide regular ao lado, a base é um quadrado inscrito numa circunferência de raio $2\sqrt{2}$ cm, e a altura $\overline{OV}$ excede a aresta da base em 2cm.

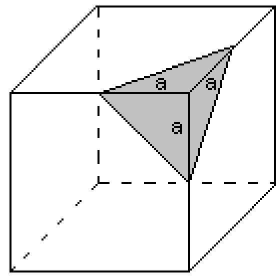


Pode-se afirmar que

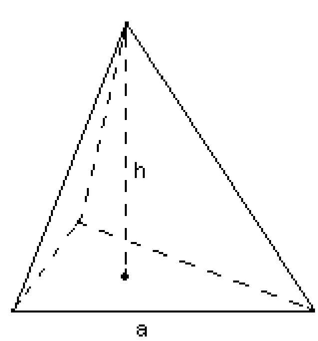
I II

0 0 o volume da pirâmide é igual a 32 cm³.
1 1 a aresta lateral mede 12 cm.
2 2 o apótema da pirâmide mede $2\sqrt{10}$ cm.
3 3 a soma dos ângulos das faces da pirâmide mede 2160º.
4 4 a área lateral da pirâmide mede $16\sqrt{10}$ cm².

32. (UFPE/05) Um cubo com lados medindo 2m é interceptado por um plano que corta 3 de suas arestas adjacentes à distância **a** cm de um dos seus vértices (veja a ilustração abaixo). Sabendo que o volume do tetraedro assim obtido é de $\frac{1}{48}$ do volume do cubo, indique o inteiro mais próximo de $\frac{\mathbf{a}}{2}$.

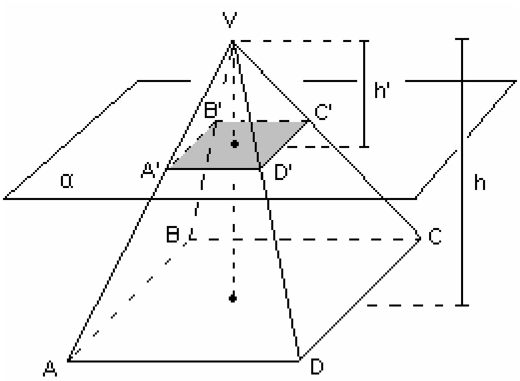


33. Sabendo que a figura abaixo é um tetraedro regular de aresta **a**, determine a medida de sua altura **h**, de sua área total $\mathbf{A_T}$ e de seu volume **V** em função de **a**.



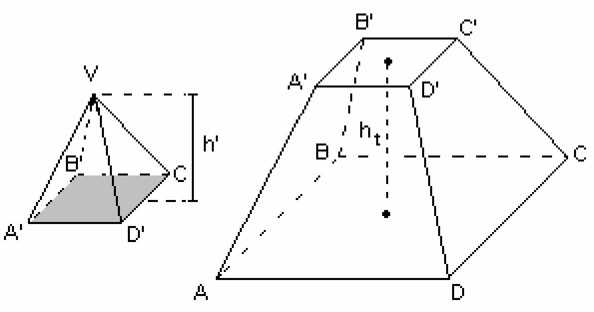
Secção paralela à base e Tronco de pirâmide

Quando se secciona uma pirâmide por um plano paralelo a sua base (figura abaixo):



$\overline{VA} = \ell$ (aresta lateral da pirâmide maior)
$\overline{VA'} = \ell'$ (aresta lateral da pirâmide menor)

- A pirâmide fica dividida em dois sólidos: Uma pirâmide menor semelhante à maior (parte superior) e um tronco de pirâmide (parte inferior). Veja a figura abaixo!



$h_t = h - h'$

- A interseção do plano com a pirâmide é um polígono semelhante à base, denominado seção transversal paralela à base;

- As arestas laterais, a altura, bem como as outras dimensões da pirâmide ficam divididas na mesma razão;

- Usando semelhança de triângulos, demonstram-se as seguintes relações:

I) $\frac{\ell'}{\ell} = \frac{h'}{h}$

II) $\left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{A_{B'}}{A_B}$

III) $\left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{V'}{V}$

Onde:

$\mathbf{A_B}$ é a área da base da pirâmide maior;
$\mathbf{A_{B'}}$ é a área da secção (base da pirâmide menor e base menor do tronco);
V é o volume da pirâmide maior e,
V' é o volume da pirâmide menor.

- As faces laterais do tronco de pirâmide são trapézios e sua **área total** é dada pela soma das áreas das faces laterais com as áreas das bases maior e menor.

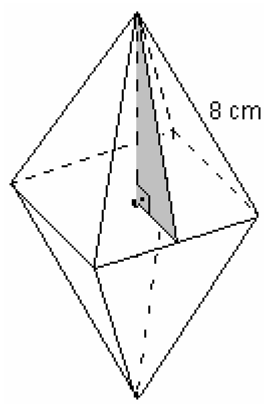
- O **volume V_T do tronco** de pirâmide é dado por:
  $V_T = V - V'$ ou $V_T = \frac{h_t}{3}\left[B + \sqrt{B.b} + b\right]$, onde $\mathbf{h_t}$ é a altura do tronco, $\mathbf{B = A_B}$ (área da base maior) e $\mathbf{b = A_{B'}}$ (área da base menor ou secção).

Vamos resolver!

34. (UFC) Considere uma pirâmide qualquer de altura **h** e base **B**. Traçando-se um plano paralelo à base B, cuja distância ao vértice da pirâmide é $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}h$ cm, obtém-se uma secção plana de área $\sqrt{7}$ cm². Calcule a área **B**.

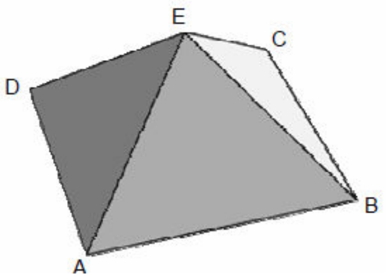
35. O octaedro regular da figura tem aresta igual a 8cm. Determine:

a) a área total do octaedro;
b) o volume desse sólido.



36. (UNIVASF/09) As faces laterais de uma pirâmide quadrada ABCDE são triângulos eqüiláteros com lados medindo 2. Qual a medida do ângulo AEC?

A) 90º
B) 75º
C) 60º
D) 45º
E) 30º



Resolva em casa!

37. (UPE) A aresta de um octaedro regular mede 5m. Podemos afirmar que a distância do centro do poliedro a qualquer das faces mede:

A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ m

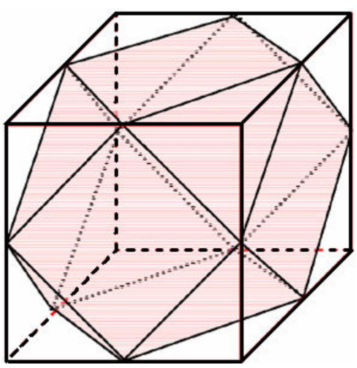
B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m

C) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ m

D) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ m

E) $5\sqrt{5}$ m

38. (UFPE) Cortando-se de um cubo os tetraedros que têm um dos vértices coincidente com um vértice do cubo e os outros três sendo os pontos médios das arestas incidentes neste vértice obtêm-se o sólido ilustrado abaixo. Sabendo que o cubo tem aresta igual a **três cm**, indique o inteiro mais próximo da área da superfície do sólido, em **cm^2?**



39. (UPE/07) Diamante: cristal de átomos de carbono é a substância mais dura da natureza, ou seja, o diamante tem capacidade de riscar qualquer outra substância, devido a sua natureza, porém, sob pressão ou impacto, se quebra com facilidade, dada a baixa tenacidade. Devido à disposição dos átomos de carbono em sua constituição, todo diamante no estado bruto (não lapidado) tem o formato de um octaedro regular. Considerando o diamante bruto de aresta 2mm, pode-se afirmar que seu volume, em mm³, é igual a

A) $\frac{4}{3}$

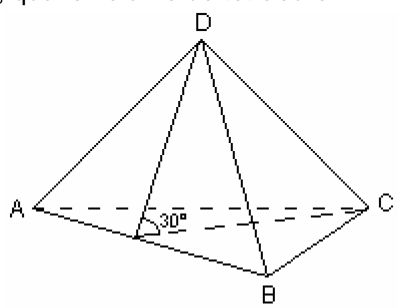
B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

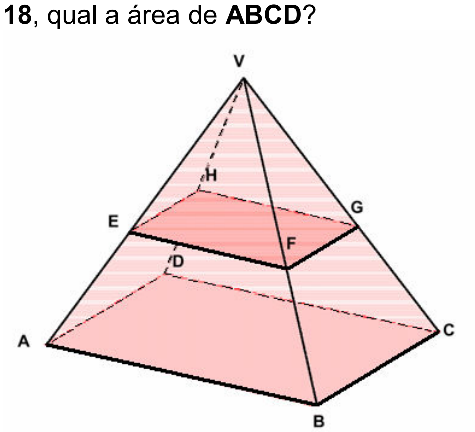
D) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

E) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

40. (UNIVASF/07) O tetraedro ABCD tem aresta AB medindo 12; a face ABD tem área 48, e a face ABC tem área 60. Se o ângulo entre as faces ABC e ABD mede 30º, qual o volume do tetraedro?



41. (UFPE) Na pirâmide quadrangular abaixo os planos que passam por **A**, **B**, **C** e **D** e por **E**, **F**, **G** e **H** são paralelos. Se **VF = 3**, **VB = 5** e a área de **EFGH** é **18**, qual a área de **ABCD**?



42. (UNICAP) Considere uma pirâmide regular, de base hexagonal, cujo apótema, mede 8 cm e a medida de cada lado da base é 6 cm.

I II

0 0 A área lateral mede 114cm²

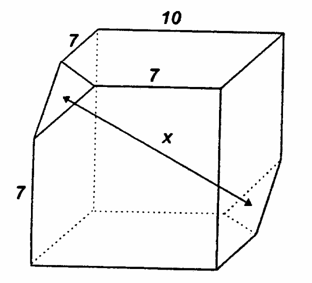
1 1 A área total mede $(144 + 27\sqrt{2})$cm²

2 2 O apótema da base mede $2\sqrt{3}$ cm

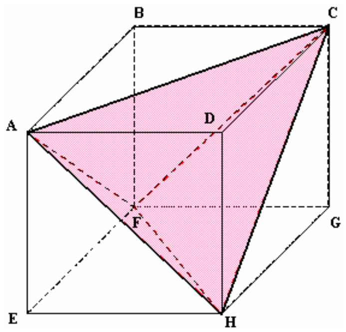
3 3 A altura da pirâmide mede $\sqrt{37}$ cm

4 4 O volume da pirâmide mede $9\sqrt{74}$ cm³

43. (UFPE) Um cubo de lado 10 cm é cortado por dois planos como mostra a figura. Cada corte intercepta três arestas do cubo em pontos distantes 3 cm do vértice mais próximo. Se a distância entre as faces triangulares do sólido resultante é x cm, calcule $\sqrt{3}$ x.



44. (UFPE) Na figura abaixo **ABCDEFGH** é um cubo de aresta **6 cm**. Qual o volume, em **cm³**, do tetraedro ACFH?

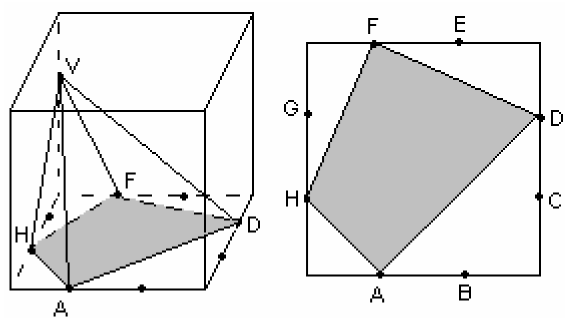


45. (UFPE) Qual o volume de um tronco de pirâmide sabendo que suas bases são quadrados de lados 4 e 6 situados em planos paralelos cuja distância é 3?

46. (UFC) Uma pirâmide hexagonal regular de altura $h = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$ m e volume V é seccionado por um plano paralelo à base determinando um tronco de pirâmide de altura x e volume $\dfrac{1}{2}V$. Determine, em metros, o valor de x.

47. (UFES/02) Os pontos A, B, C, D, E, F, G, H dividem, respectivamente, cada uma das arestas da base de um cubo em três partes iguais, conforme as figuras abaixo. Um ponto V está sobre uma aresta do cubo e a uma distância da base igual a 2/3 da aresta. A razão entre o volume do cubo e o volume da pirâmide de vértice V e base ADFH é

A) 9
B) 8
C) 7
D) 6
E) 5



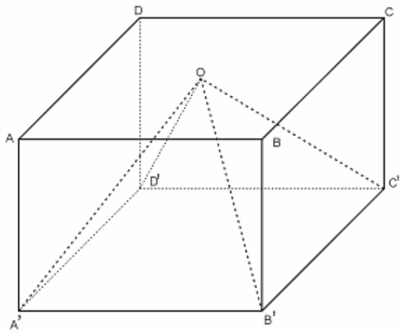
48. (UFPE) Calcule o quadrado do volume do octaedro regular, cujas arestas medem $\sqrt[3]{3}$ unidades de comprimento.

49. (UNICAP) Um obelisco tem a forma de uma pirâmide regular cujo apótema mede 12 metros e uma aresta da base medindo 10 metros. Calcular, em metros, a medida de uma aresta lateral.

50. (UNIVASF/05) Uma pirâmide regular de base quadrada tem o lado da base medindo o dobro da altura e área lateral medindo $144\sqrt{2}$ cm². O volume dessa pirâmide, em cm³, é

A) $72\sqrt{2}$
B) 288
C) $576\sqrt{2}$
D) 864
E) 2304

51. (UFBA/05) Na figura, os quadrados ABCD e A'B'C'D', cujos lados medem 10 u.c., são as bases de um prisma reto de altura igual a $5\sqrt{3}$ u.c., e o ponto O é, ao mesmo tempo, o centro do quadrado ABCD e o vértice da pirâmide com base A'B'C'D'. A partir dessas informações, pode-se afirmar:



(01) Qualquer plano que contenha uma face lateral da pirâmide faz um ângulo de 60º com o plano da base A'B'C'D'.

(02) Qualquer aresta lateral da pirâmide faz um ângulo de 60º com o plano da base A'B'C'D'.

(04) Existem uma aresta da pirâmide que é coplanar ao segmento DD' e uma aresta da pirâmide que está contida numa reta reversa à reta que contém DD'.

(08) A área do triângulo OC'D' é igual a 50 u.a.

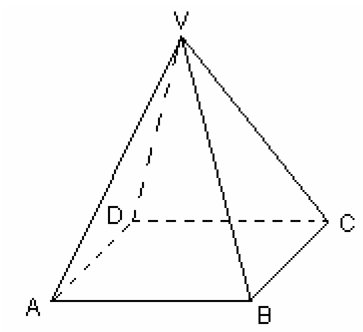
(16) O volume do sólido compreendido entre o prisma e a pirâmide é igual a $\dfrac{500\sqrt{3}}{3}$ u.v.

52. (ITA/06) Seja uma pirâmide de base hexagonal e altura 10m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja 1/8 do volume da pirâmide original?

A) 2 m
B) 4 m
C) 5 m
D) 6 m
E) 8 m

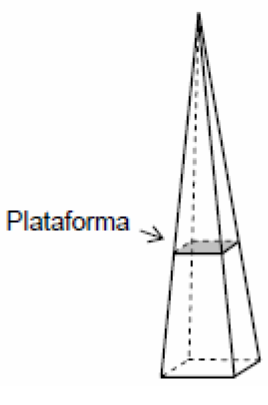
53. (UFPE/06.2) Uma pirâmide regular com base quadrada ABCD e vértice V tem o ângulo AVB medindo 45º, segundo a ilustração abaixo. Qual o cosseno do ângulo formado pelas arestas opostas VA e VC?

A) $\sqrt{2}-1$
B) $\sqrt{3}-1$
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $\frac{1}{2}$



54. (UFG/07) A figura abaixo representa uma torre, na forma de uma pirâmide regular de base quadrada, na qual foi construída uma plataforma, a 60 metros de altura, paralela à base. Se os lados da base e da plataforma medem, respectivamente, 18 e 10 metros, a altura da torre, em metros, é:

A) 75
B) 90
C) 120
D) 135
E) 145



55. (UPE/08) Os rebatimentos dos vértices das faces laterais de uma pirâmide sobre o plano que contem a base é são vértices de um quadrado de lado 4cm, além disso, os vértices da base são os pontos médios dos apótemas desse quadrado. O volume, em metros cúbicos, e a área total, em metros quadrados, da pirâmide são

A) 4/3 e 4
B) 2/3 e 8
C) 1/3 e 4
D) 4/3 e 8
E) 2/3 e 2

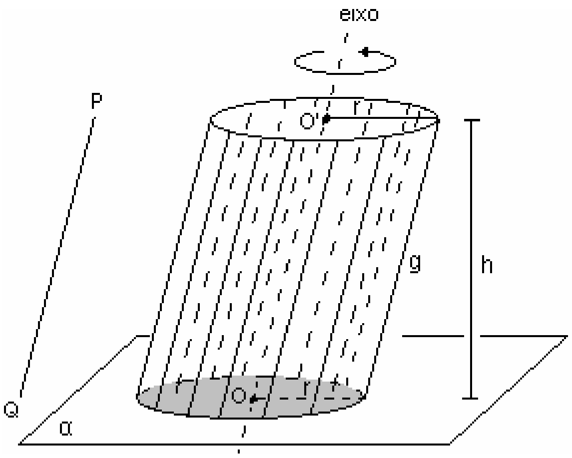
RESOLVA EM CASA

37	C	**46**	02
38	43	**47**	A
39	E	**48**	02
40	80	**49**	13
41	50	**50**	B
42	*	**51**	05
43	24	**52**	C
44	72	**53**	A
45	76	**54**	D

***42** – v,f,f,v,f
55 – D

CILINDRO CIRCULAR

Dado um círculo de centro O e raio R situado num plano α, e um segmento de reta PQ, não nulo, não paralelo e não contido em α, chama-se *cilindro circular* ou *cilindro* à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, que têm uma extremidade no círculo e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.



Elementos, denominação e classificação

- Os círculos congruentes situados em planos paralelos são as **bases** do cilindro;
- Geratriz **g** é todo segmento com uma extremidade em um ponto da circunferência de centro O e raio r e outra no ponto correspondente da circunferência de centro O' e raio r;
- A altura **h** de um cilindro é a distância entre os planos das bases;
- Se as geratrizes são oblíquas aos planos das bases, o cilindro é dito *cilindro circular oblíquo* (figura do exemplo), mas se são perpendiculares aos planos das bases, temos um *cilindro circular reto ou de revolução.*

Área da base (A_B)

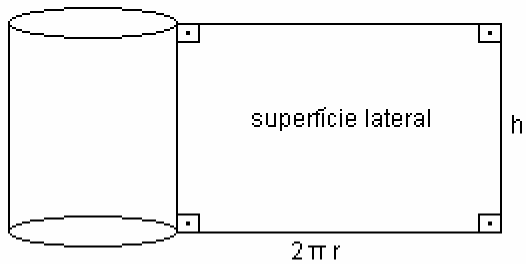
É a área do círculo da base do cilindro.

$$\boxed{A_B = \pi.r^2}$$

Área lateral (A_L)

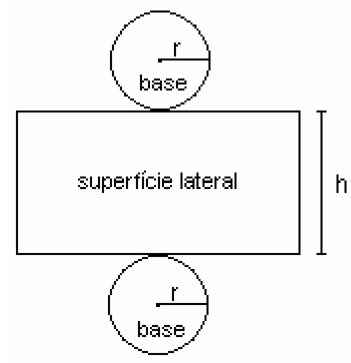
Superfície lateral é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície é chamada **área lateral** (A_L) e é dada por:

$$\boxed{A_L = 2.\pi.r.h}$$



Área total (A_T)

Superfície total é a reunião da superfície lateral com os círculos das bases. A área dessa superfície é denominada **área total** e é dada por:



$$A_T = A_L + 2.A_B \text{ ou}$$

$$A_T = 2.\pi.r.h + 2.\pi.r^2 \text{ ou ainda}$$

$$\boxed{A_T = 2.\pi.r.(h + r)}$$

Volume (V)

O **volume** de um cilindro é o produto da área da base pela medida da altura.

$$V = A_B.h \text{ ou}$$

$$\boxed{V = \pi.r^2.h}$$

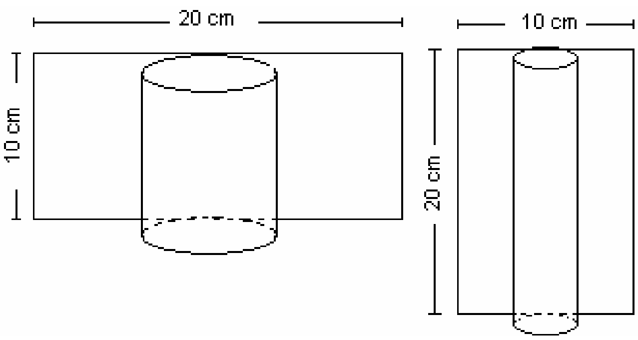
Vamos resolver!

56. (UFBA) Um cubo, cuja diagonal mede $5\sqrt{3}$ dm, circunscreve um cilindro circular reto. O volume do cubo é igual a x dm³ e o do cilindro, igual a y dm³. Determine o valor de $\sqrt[3]{x} + \dfrac{4y}{25\pi}$.

57. (UEFS/03) Uma quantidade de óleo ocupa uma lata cilíndrica até uma altura de 12cm. Transferindo-se o óleo para outra lata, também cilíndrica, com raio igual a 1,4 vezes o raio da primeira, a altura alcançada, nesse segundo recipiente, mede, aproximadamente, em cm,

A) 6,1
B) 7,5
C) 8,0
D) 9,5
E) 10,0

58. (ENEM/06) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.

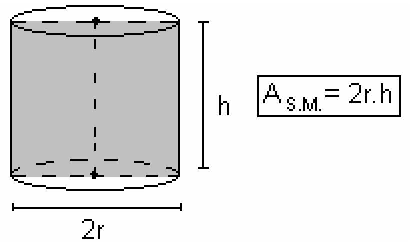


Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo **I**, em relação ao custo da vela do tipo **II**, será

A) o triplo.
B) o dobro.
C) igual.
D) a metade.
E) a terça parte.

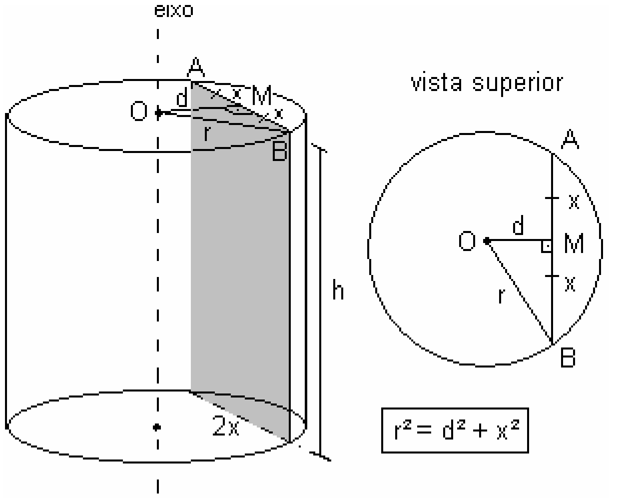
Secções

Secção meridiana é a interseção do cilindro com um plano que contém o seu eixo. Se o cilindro for reto, secção meridiana será um retângulo de base 2r e altura h. Caso a medida da altura seja igual ao do diâmetro da base (h = 2r), o cilindro será denominado "cilindro equilátero".



$$\boxed{A_{S.M.} = 2r.h}$$

Secção longitudinal é a interseção do cilindro com um plano paralelo ao seu eixo a uma distância **d** (0 < d < r) do mesmo.

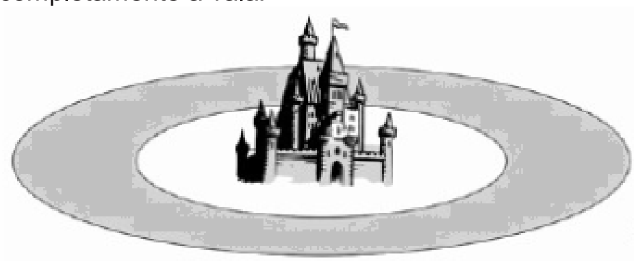


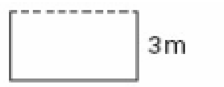
$$\boxed{r^2 = d^2 + x^2}$$

$$\boxed{A_{S.L.} = 2x.h}$$

Vamos resolver!

59. (FUVEST/07 - 2ª fase) Um castelo está cercado por uma vala cujas bordas são dois círculos concêntricos de raios 41m e 45m. A profundidade da vala é constante e igual a 3m. O proprietário decidiu enchê-la com água e, para este fim, contratou caminhões-pipa, cujos reservatórios são cilindros circulares retos com raio da base de 1,5m e altura igual a 8m. Determine o número mínimo de caminhões-pipa necessário para encher completamente a vala.





Seção transversal da vala

Resolva em casa!

60. (UFPE) Um contêiner, na forma de um cilindro circular reto, tem altura igual a 3m e área total (área da superfície lateral mais áreas da base e da tampa) igual a $20\pi m^2$. Calcule, em metros, o raio da base deste contêiner.

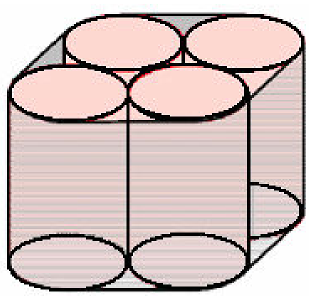
61. (UFPE) Aumentando-se o raio de um cilindro em 10% e diminuindo-se sua altura em 10%, podemos afirmar que:

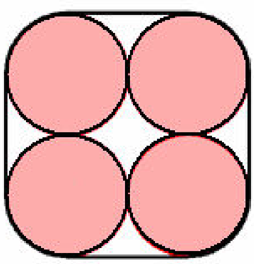
A) A área total do cilindro aumenta em 10,5%.
B) O volume do cilindro aumenta em 33,1%.
C) A área de uma das bases do cilindro aumenta em 21%.
D) A área lateral do cilindro não varia.
E) A soma do raio da base do cilindro com sua altura permanece inalterada.

62. (UPE) Uma secção plana que contém o eixo de um tronco de cilindro circular reto é um trapézio de bases 6m e 2m, respectivamente, e altura 20cm. Podemos afirmar que a área lateral do tronco mede:

A) $0,8\pi m^2$; D) $0,4\pi m^2$;
B) $4\pi m^2$; E) πm^2.;
C) $8\pi m^2$

63. (UFPE) Quatro tonéis cilíndricos idênticos de raio da base 1m e altura 3m devem ser transportados juntos num "container" da mesma altura dos cilindros conforme a ilustração abaixo. Qual o inteiro mais próximo da área lateral (em m²) do "container"?

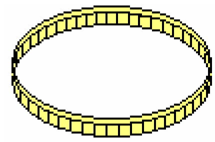




Vista Superior

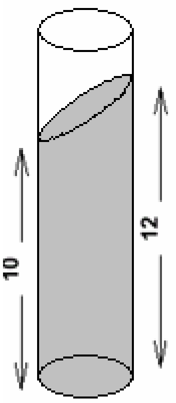
64. A aliança de ouro da figura ao lado tem raio externo 22 mm, raio interno 21,5 mm e altura 3 mm. Determine o valor aproximado, em gramas, de massa do ouro utilizado para fazer a aliança, sabendo que a massa específica do ouro é 20g/cm³.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

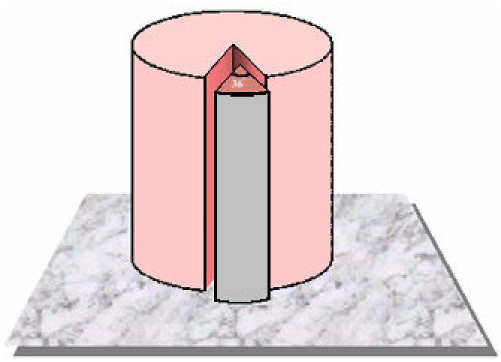


65. (UNICAP) Dois cilindros C_1 e C_2 têm a mesma altura, porém os seus raios da base medem respectivamente 10cm e 15cm. Se a área total do cilindro C_1 é igual à área lateral do cilindro C_2 , então qual é a altura dos cilindros?

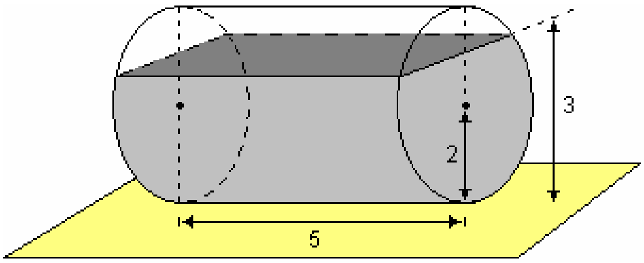
66. (UFPE) Uma barra de chocolate na forma de um cilindro circular reto com raio da base medindo **2** e altura **14** é cortado transversalmente por um plano de forma que os pontos do corte, situados à menor e à maior distância da base, distam **10** e **12,** respectivamente, como ilustrado na figura abaixo. Dentre os sólidos em que fica dividida a barra de chocolate, qual o inteiro mais próximo do volume do menor?



67. (UFPE) Interceptando-se um cilindro reto com raio da base igual a **2 cm** e altura **5 cm** com dois planos que passam pelo eixo do cilindro e formam um ângulo de **36º** entre eles, obtém-se o sólido ilustrado abaixo. Indique o inteiro mais próximo do volume deste sólido, em $\mathbf{cm^3}$.



68. (UFPE) O reservatório em forma de cilindro reto de raio da base **2m** e altura **5m** encontra-se na horizontal e preenchido com água até o nível de **3m**, conforme ilustrado na figura a seguir. Calcule o volume, em **m^3**, de água no reservatório e assinale o inteiro mais próximo do valor obtido.

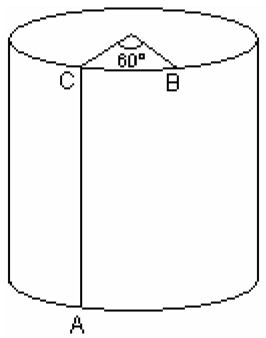


69. (UNEB) A razão entre o volume de um cubo e o volume de um cilindro circular reto inscrito nesse cubo é igual a:

01) 4/π
02) 2/π
03) 1/π
04) 1/ 2π
05) 1/ 4π

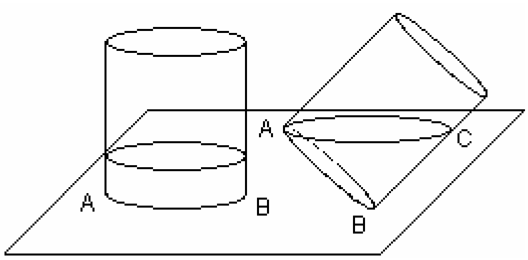
70. (UFPE/03) Na figura abaixo os pontos **A** e **B** estão nos círculos das bases de um cilindro reto, de raio da base**15/π** e altura **12**. Os pontos **A** e **C** pertencem a uma geratriz do cilindro e o arco **BC** mede **60** graus. Qual a menor distância entre **A** e **B** medida sobre a superfície do cilindro?

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14



71. (UFPE/05) Na ilustração abaixo, temos um cilindro reto, medindo 30 cm de altura, preenchido por um líquido até certa altura e apoiado em uma superfície horizontal. Os pontos A e B são extremos de um diâmetro da base e B e C estão em uma mesma geratriz do cilindro. Quando inclinamos o cilindro, mantendo o ponto B na superfície, até que o nível de líquido esteja no ponto A, o nível em C fica a 10cm do ponto B. Qual a altura do líquido quando o cilindro está na vertical?

A) 4cm
B) 5cm
C) 6cm
D) 7cm
E) 8cm



72. (UFBA/07) Considere um prisma reto triangular de altura igual 10cm e um cilindro circular reto de raio da base igual a r, medido em cm, inscrito nesse prisma. Em função de r,

● deduza a expressão do lado do triângulo, base desse prisma;

● determine o volume da região exterior ao cilindro e interior do prisma.

73. (UFBA/06) Considerando-se C_1, C_2, C_3, ... cilindros com o mesmo volume, de modo que os respectivos raios das bases, medidos em centímetros, formem uma progressão geométrica com o primeiro termo e razão iguais a $\sqrt{5}$, é correto afirmar:

(01) O número real $5^{61}\sqrt{5}$ é o termo de ordem 122 da seqüência dos raios.

(02) O termo geral da seqüencia dos raios pode ser escrito como $r_k = 5^{\frac{k}{2}}$.

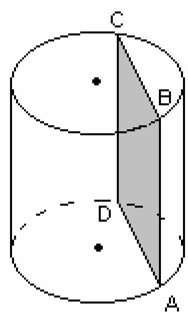
(04) Considerando-se apenas os termos de ordem par da seqüencia dos raios, obtém-se uma progressão geométrica de razão 5, em que todos os termos são números inteiros positivos.

(08) A seqüencia formada pelas alturas dos cilindros é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

(16) Sendo o volume dos cilindros igual a $\pi\sqrt{20}$ cm³, a área total do primeiro cilindro expressa em cm², é um n úmero menor que 42.

74. (UESB/06) Um reservatório em forma de cilindro circular reto é interceptado por um plano - paralelo ao seu eixo e a $\sqrt{6}$ dm de distância desse eixo - que determina uma seção meridiana retangular ABCD com área igual a 8dm². Sendo iguais a altura e o raio da base do cilindro, pode-se afirmar que a capacidade do reservatório é igual, em litros, a

01) $0{,}2\sqrt{2}\pi$
02) $1{,}6\sqrt{2}\pi$
03) $2\sqrt{2}\pi$
04) 16π
05) $16\sqrt{2}\pi$



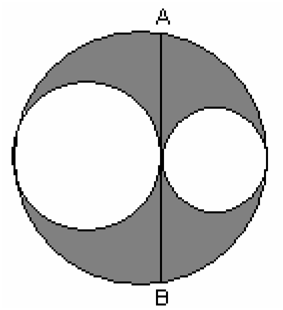
75. (UNEB/08) Um recipiente cilíndrico está com $\frac{2}{3}$ da sua capacidade tomada por um líquido. Se o recipiente tem 20cm de diâmetro e $\frac{15}{\pi}$ cm de altura, então a quantidade, em litros, do conteúdo do recipiente é

01) 0,5
02) 0,8
03) 1,0
04) 1,2
05) 1,5

76. (UPE/08) Uma piscina circular tem 5m de diâmetro. Um produto químico deve ser misturado à água, na razão de 25g por 500 litros de água. Se a piscina tem 1,6m de profundidade está totalmente cheia, quanto do produto deve ser misturado à água? (Use π = 3,1)

A) 1,45 kg
B) 1,55 kg
C) 1,65 kg
D) 1,75 kg
E) 1,85 kg

77. (UPE/08) A figura ao lado representa a planta baixa de uma parte aquática de um condomínio residencial. O terreno é circular de raio R, as partes brancas são duas piscinas circulares, sendo a maior para adulto, a menor para crianças, de raios diferentes, e a parte escura é a área para banho de sol. A corda AB do círculo que delimita o terreno é tangente às circunferências que delimitam as piscinas e mede x metros.



I II

0 0 Se x = 8m, a área de banho de sol mede, em metros quadrados, 2πm².

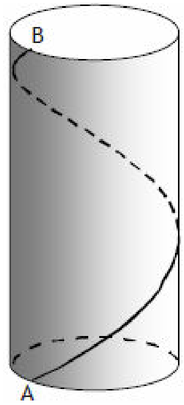
1 1 Se a corda AB = 16m e R = 10m, então a piscina de adulto ocupa 1/3 da área do terreno.

2 2 Se a piscina de criança tem 1,50m de profundidade, R = 10m e AB = 16m, então seu volume, em metros cúbicos, é igual a $6\tilde{\pi}$

3 3 Se a corda AB = 16m, e o raio da piscina menor é 2m, a área do terreno é 100πm².

4 4 Se R = 10m e AB = 16m, então o raio da piscina maior é 8m.

78. (UNIVASF/07-2ªfase) Qual a menor quantidade de fita que deve ser utilizada para enfeitar o mastro de forma cilíndrica (reto) de uma bandeira de 5m de altura, como na figura abaixo, se são gastos 50cm para cada volta na superfície do cilindro. O diâmetro do mastro é 15cm. Assinale o inteiro mais próximo em metros.



GABARITO– RESOLVA EM CASA

60	02
61	C
62	A
63	43
64	B
65	20
66	38
67	06
68	51
69	01
70	D
71	B
72	#
73	14
74	05
75	03
76	B
77	F,F,V,V,V

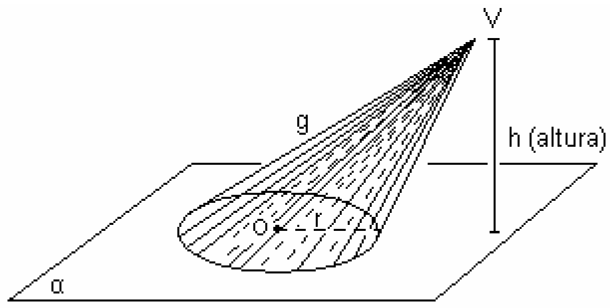
$\ell = 2r\sqrt{3}$ cm e $V = 10r^2(3\sqrt{3} - \pi)$ cm³

78 - 15

CONE CIRCULAR

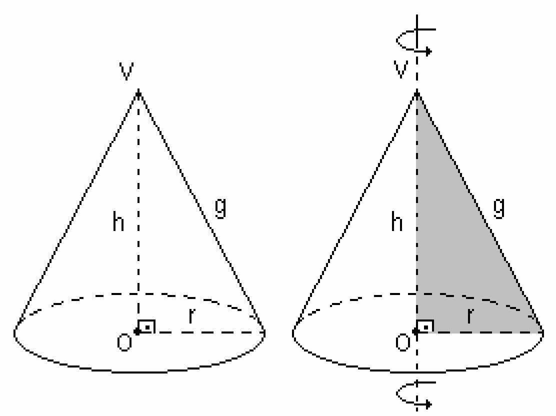
Dado um círculo de centro O e raio R situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se *cone circular* ou *cone* à reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e outra num ponto qualquer do círculo.

Exemplo: Cone oblíquo



Elementos, denominação e classificação

- O círculo de centro **O** e raio **r** é a *base* do cone;
- G*eratriz* ***g*** é qualquer segmento com uma extremidade em V e outra num ponto da circunferência da base;
- A distância do ponto V ao plano da base é altura **h** do cone;
- A reta determinada pelo vértice V e pelo centro O da base é o eixo do cone;
- Se o eixo do cone for oblíquo à base, o cone será denominado *cone circular oblíquo* (veja a figura do exemplo acima), porém se o eixo for perpendicular ao plano da base, o cone será denominado *cone circular* reto ou ainda *cone de revolução*. Veja!

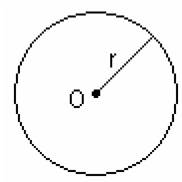


- No cone circular reto vale a relação:

$$\boxed{g^2 = h^2 + r^2}$$

Área da base (A_B)

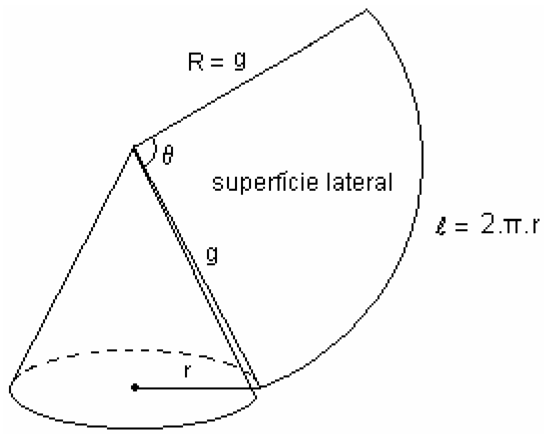
É a área do círculo da base do cone.



$$\boxed{A_B = \pi.r^2}$$

Área lateral (A_L)

Da geometria plana sabemos que a área de um setor circular de comprimento ℓ, raio R e ângulo central α (em radianos) é $A_{setor} = \frac{\ell.R}{2}$. A superfície lateral de um cone é equivalente a um setor circular de raio g e comprimento do arco 2.π.r, logo **a área lateral** do cone é dado por



$$A_L = \frac{\ell.R}{2}$$
$$\downarrow$$
$$A_L = \frac{2\,\pi\, r.g}{2}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{A_L = \pi.r.g}$$

Ainda da geometria plana, sendo θ o ângulo central de um setor, este ângulo é dado por:

$$\theta = \frac{\ell}{R}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\theta = \frac{2.\pi.r}{g}}$$

Área total (A_T)

É a soma das áreas lateral e da base do cone.

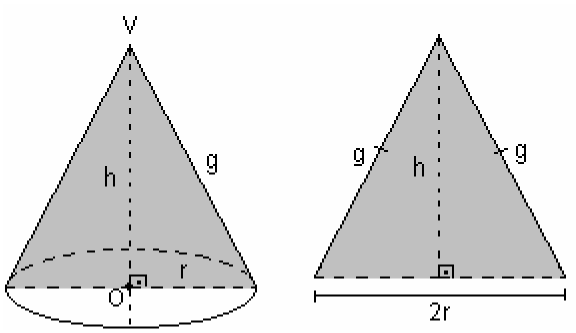
$$A_T = A_L + A_B$$
$$\downarrow$$
$$A_T = \pi\, r\, g + \pi\, r^2$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{A_L = \pi r(g + r)}$$

Volume (V)

O volume do cone é dado pela expressão:

$$V = \frac{1}{3} A_B\, h$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

● **Secção meridiana** de um cone é a interseção do cone com um plano que contém o seu eixo. Se o cone for reto, a secção meridiana será um triângulo isósceles. Veja!



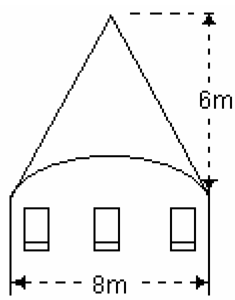
$$A_{S.M.} = \frac{2r.h}{2}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{A_{S.M.} = r.h}$$

● Se g = 2r, então a secção meridiana é um triângulo equilátero e o cone é denominado *cone equilátero.*

Vamos resolver!

79. (UNICAP) Um cone circular reto, de geratriz medindo 13 cm, está inscrito em um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 5 cm. Qual a altura do cilindro?

80. (UNIFOR/03) O telhado da torre mostrada na figura abaixo tem a forma de um cone circular reto.



A área da superfície externa desse telhado é, em m², igual a

A) 16π
B) 24π
C) $8\sqrt{13}\pi$
D) 28π
E) $32\sqrt{13}\pi$

81. (ITA) Qual é o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é 24πcm² e o raio de sua base é 4cm?

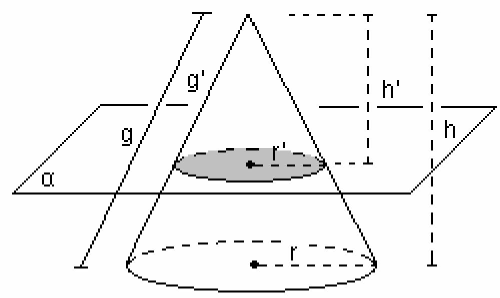
A) $\frac{16\sqrt{20}\pi}{3}$ cm³
B) 6πcm³
C) $\frac{\sqrt{24}\pi}{3}$ cm³
D) $\frac{6\sqrt{24}\pi}{3}$ cm³
E) $\frac{\sqrt{20}\pi}{3}$ cm³

82. (UPE) Um cone e um cilindro eqüiláteros têm a mesma altura. Então a razão entre o volume do cone e do cilindro é igual a:

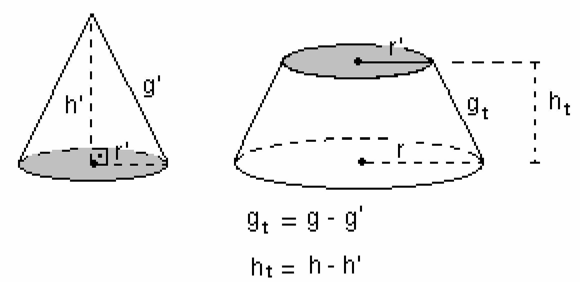
A) $\frac{5}{3}$
B) $\frac{3}{5}$
C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{9}$
E) $\frac{9}{4}$

Secção transversal e tronco de cone

Como já foi visto nas pirâmides, também aqui no cone, ao se secccioná-lo por um plano paralelo à base, este fica dividido em dois sólidos: um *cone menor*, semelhante ao original, cujas relações de proporcionalidade são mantidas e, um *tronco de cone.* Veja!



Separando os sólidos, temos:



- A secção determinada pelo plano α, paralelo à base do cone, é um círculo cujo raio mede r'. Este círculo também é a base menor do tronco de cone.

- O volume V_T do tronco é a diferença entre os volumes dos cones maior e menor, respectivamente.

$$V_T = V - V'$$

ou

$$\boxed{V_T = \frac{\pi . h_t}{3}\left(r^2 + r.r' + r'^2\right)}$$

- A área lateral do tronco de cone é a diferença entre as áreas laterais do cone maior e do cone menor, logo é dado por:

$$\boxed{A_{LT} = \pi . g . (r + r')}$$

- Também valem as relações:

I) $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} = \frac{g'}{g}$

II) $\left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{A_B'}{A_B}$

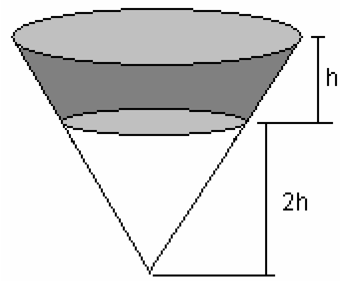
III) $\left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{V'}{V}$

onde:

A_B é a área da base do cone maior;
$A_{B'}$ é a área da secção (base do cone menor e base menor do tronco);
V é o volume do cone maior e,
V' é o volume do cone menor.

Vamos resolver!

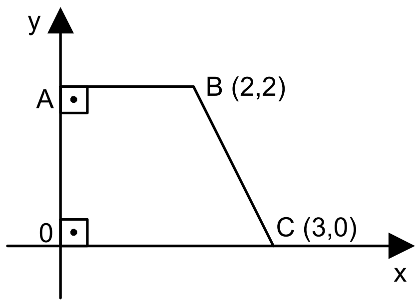
83. (UFPE/06) Um recipiente na forma de um cone reto invertido está preenchido com água e óleo, em duas camadas que não se misturam. A altura, medida na vertical, da camada de óleo é metade da altura da parte de água, como ilustrado a seguir.



Se o volume do recipiente é 54cm³, qual o volume da camada de óleo?

A) 32cm³
B) 34cm³
C) 36cm³
D) 38cm³
E) 40cm³

84. (UFPE) O trapézio OABC da figura gira completamente em torno do eixo $\overline{OX}$. Calcule o inteiro mais próximo do volume do sólido obtido.



Resolva em casa!

85. (UPE) Um cone reto tem raio da base R e altura H. Secciona-se esse cone por um plano paralelo à base e distante h do vértice, obtendo um cone menor e um tronco de cone, ambos com o mesmo volume. Podemos afirmar que a razão entre as alturas do cone menor e do cone maior é:

A) $\frac{h}{H} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

B) $\frac{h}{H} = \frac{1}{2}$

C) $\frac{h}{H} = \frac{\sqrt[4]{4}}{2}$

D) $\frac{h}{H} = \frac{\sqrt[3]{6}}{3}$

E) $\frac{h}{H} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

86. (UFBA/04) Uma empresa fabrica copos plásticos para refrigerante e café. Os copos têm a forma de um tronco de cone e são semelhantes, isto é, um deles pode ser obtido a partir do outro por homotetia. O copo de refrigerante tem 9,5 cm de altura e capacidade para 480 ml. Sabendo-se que o copo de café tem 3,8cm de altura, determine a sua capacidade em mililitros, aproximando o resultado para o número inteiro mais próximo.

87. (UPE) Sejam A(2,1) e B(4,1) e C(x,y) vértices de um triângulo eqüilátero. Pode-se afirmar que o volume do sólido gerado pela rotação completa do triângulo em torno do eixo das ordenadas é:

A) $\frac{8}{3}\pi\sqrt{3}$

B) $8\pi\sqrt{3}$

C) $6\pi\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$

E) $\frac{5}{3}\pi\sqrt{3}$

88. (FUVEST) Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e água. Para que isso seja possível, a altura x atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:

A) $\frac{8}{3}$ cm

B) 6 cm

C) 4 cm

D) $4\sqrt{3}$cm

E) $4\sqrt[3]{4}$cm

89. (UFC) Achar $\frac{V}{\pi}$, onde Vcm³ é o volume de um sólido gerado por um triângulo equilátero de lado igual a $\sqrt[3]{6}$cm, quando se efetua uma volta completa deste triângulo em torno de um eixo passando por um vértice e paralelo ao lado oposto.

90. (UFC) O raio da base de um cone circular reto mede 4 cm e sua altura $\frac{25}{\pi}$ cm. Determine, em cm³, o volume de um cilindro reto de maior área lateral, inscrito no cone.

91. (UFC) Com certa quantidade de massa de modelar é construído um sólido na forma de um cilindro circular reto, de altura Hcm e raio da base Rcm. Com a mesma quantidade de massa, quantos sólidos na forma de cones circulares retos, iguais, com alturas Hcm e raios $r = \frac{R}{4}$cm podem ser construídos, sem desperdício de massa?

92. (UFC) Um triângulo retângulo de catetos medindo 2cm e $2\sqrt{3}$cm. Se **A** é a medida, em cm², da área da superfície do sólido gerado pela rotação completa deste triângulo em torno de sua hipotenusa, determine o valor de $\frac{A}{\pi(3+\sqrt{3})}$.

93. (UPE/01) Assinale, na coluna **I**, as afirmativas *verdadeiras* e, na coluna **II**, as *falsas*.

I II

0 0 O volume de um cone circular reto é igual a um terço do volume de um cilindro circular reto de base e altura, respectivamente, iguais às do cone.

1 1 Dois cones circulares e retos de mesma capacidade devem ter, obrigatoriamente, bases e alturas iguais.

2 2 Se o diâmetro da base de um cone circular reto tem a mesma medida que sua altura, seu volume é $V = \frac{2}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da base.

3 3 O volume de um cone circular reto, cuja geratriz mede 10 m e o raio da base mede 6 m é V = 96π m³.

4 4 O volume de um cone circular reto pode ser calculado, conhecendo-se a geratriz e raio da base, usando a fórmula $V = \frac{1}{3}\pi(g^2 - h^2)$.

94. (ITA) A geratriz de um cone circular reto forma com o eixo deste cone um engulo de 45º. Sabendo-se que o perímetro de sua seção meridiana mede 2cm, podemos afirmar que a área total deste cone vale:

A) $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-2)\,cm^2$
B) $\pi(\sqrt{2}-1)\,cm^2$
C) $\pi(\sqrt{3}-1)\,cm^2$
D) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)\,cm^2$
E) $\pi(\sqrt{5}-1)\,cm^2$

95. (ITA) Qual o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é 24π cm² e o raio de sua base mede 4 cm?

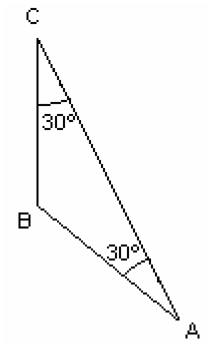
A) $\frac{16}{3}\sqrt{20}\pi\ cm^3$
B) $\frac{\sqrt{24}}{4}\pi\ cm^3$
C) $\frac{\sqrt{24}}{3}\pi\ cm^3$
D) $\frac{8\sqrt{24}}{4}\pi\ cm^3$
E) $\frac{8\sqrt{24}}{3}\pi\ cm^3$

96. (UFC) Um chapéu de cartolina, de forma cônica, tem raio igual a 4 cm e altura $8\sqrt{2}$ cm. Planificando a superfície lateral do cone, obtém-se um setor circular de ângulo **α**. A medida, em graus, do ângulo α é:

A) 30º
B) 60º
C) 90º
D) 120º
E) 130º

97. (UPE/02) Considere o sólido gerado pela rotação do triângulo ABC, isósceles, com AB e BC, medindo 8m, em torno de uma reta, contendo o lado BC. O volume do sólido gerado é em m³

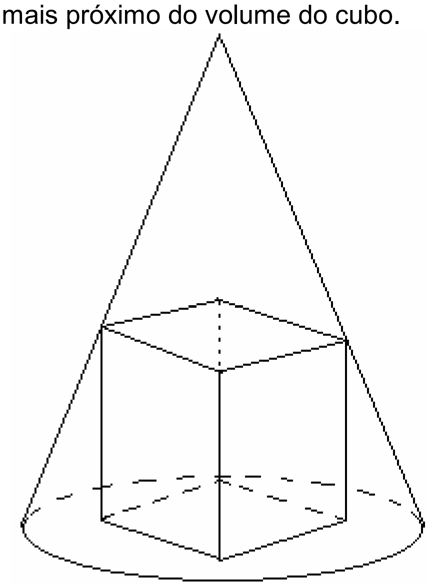
A) 128π.
B) 128.
C) 182π.
D) 182.
E) 120π.



98. (UPE/05) Considere R a região do plano limitada pelas desigualdades $\begin{cases} y \geq 0 \\ x+y \geq 2 \\ x+2y \leq 4 \end{cases}$. O volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo das ordenadas é igual a

A) $\frac{5}{3}\pi$ u.v.
B) 12π u.v.
C) $\frac{4}{3}\pi$
D) 8π u.v.
E) 6π u.v.

99. (UFPE/05 – 2ª fase) Um cubo inscrito em um cone circular reto, como ilustrado a seguir (uma face do cubo está contida na base do cone, e os vértices da face oposta estão na superfície do cone). Se o cone tem raio da base medindo 4 e altura 8, assinale o inteiro mais próximo do volume do cubo.



100. (ITA/03) A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm³, é igual a

A) πR³
B) $\pi\sqrt{2}R^3$
C) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}R^3$
D) $\pi\sqrt{3}R^3$
E) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}R^3$

101. (UFC/03) Um cone circular reto e uma pirâmide de base quadrada têm a mesma altura e o mesmo volume. Se r é a medida do raio da base do cone, e b é a medida do lado da base da pirâmide, então o quociente b/r é igual a:

A) 1/3
B) 1
C) $\sqrt{\pi}$
D) π
E) 2π

102. (ITA/06) Seja ***S*** a área da superfície total de um cone circular reto de altura ***h***, e seja ***m*** a razão entre as áreas lateral e da base desse cone. Obtenha uma expressão que forneça ***h*** em função apenas de ***S*** e ***m***.

103. (UNEB/08) Um recipiente tem a forma de um tronco de cone reto de bases paralelas e raios das bases medindo 9cm e 3cm. Considerando-se 10cm, a altura do recipiente, pode-se afirmar que sua capacidade, em cm³, é igual a

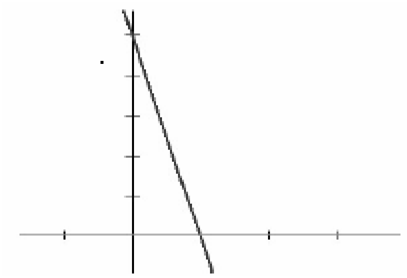
01) 390 π
02) 375 π
03) 350 π
04) 315 π
05) 300 π

104. (UEFS/08.2) A medida do raio da base de um cone circular reto, de volume V = 54 π u.v., é igual à média aritmética da altura e da geratriz desse cone. Assim, as dimensões do cone, altura, raio da base e geratriz nessa ordem, formam uma

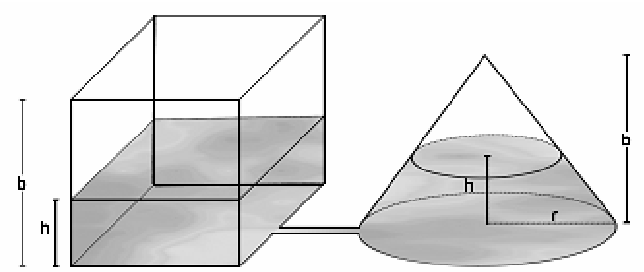
A) progressão aritmética de razão 1,5.
B) progressão aritmética de razão 2.
C) progressão geométrica de razão 1,5.
D) progressão geométrica de razão 2.
E) sequência que não é uma progressão aritmética e nem geométrica.

105. (UPE/09) Na figura abaixo, R é a região limitada pelas inequações $5x + y \le 5$, $x \ge 0$ e $y \ge 0$, e as medidas x e y são medidas em unidades de comprimento. Então o volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo dos y é igual a

A) 3 π u.v.
B) 4/3 π u.v.
C) 5/3 π u.v.
D) 2/3 π u.v.
E) 1/3 π u.v



106. (UFBA/05- 2ª fase) A figura representa dois tanques: um deles com a forma de um cubo de aresta **b**, e o outro com a forma de um cone circular reto, de altura também **b** e raio da base medindo **r**. Os tanques têm a mesma capacidade, estão com suas bases sobre um terreno horizontal plano e são ligados por um tubo, de modo que o nível de água, representado por h, seja o mesmo. Considere $V_1(h)$ e $V_2(h)$ os volumes de água no primeiro e no segundo tanque, respectivamente. Com base nessas informações e desprezando a espessura das paredes dos tanques, determine o valor de $\frac{h}{b}$, de modo que $V_2(h) = 3V_1(h)$, com $h \neq 0$.



107. (UPE/04) Ao chegar em um bar, Eduarda encontrou seu amigo Neto. Resolveram pedir um chopp que é servido em uma tulipa, em forma de cone circular reto de 20 cm de altura. A tulipa é servida totalmente cheia de bebida. Neto disse a Eduarda que tomasse a metade do chopp e deixasse para ele o restante. Para atender ao pedido de Neto, Eduarda bebeu uma certa quantidade de chopp, deixando o restante para Neto. Em cm, qual a altura da quantidade de chopp deixada para Neto?

A) $2\sqrt{5}$
B) $10\sqrt[3]{4}$
C) $4\sqrt[3]{10}$
D) $5\sqrt[4]{2}$
E) $4\sqrt[3]{2}$

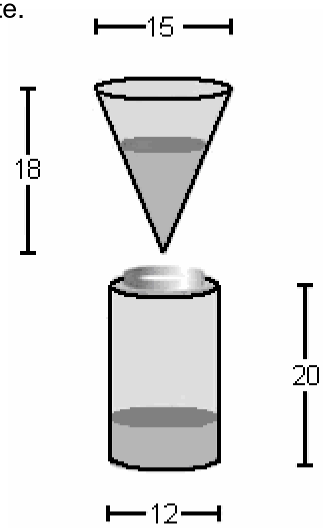
108. (UESB/07) Para a decoração de Natal, foi confeccionado, com um setor circular de cartolina, um cone com altura e raio da base medindo 40cm e 30cm, respectivamente. Considerando-se que foram utilizados **x π** cm² de cartolina na confecção, pode-se afirmar que o valor de x é igual a

01) 2000
02) 1900
03) 1600
04) 1500
05) 1200

109. (UFPB/09) Para fazer seu cafezinho, dona Severina ferve a água e o pó de café juntos; em seguida, despeja essa mistura em um filtro de onde o café escoa para um recipiente, conforme a figura ao lado. Nessa situação, considere:

• o recipiente tem a forma de um cilindro circular reto, com diâmetro e altura medindo 12 cm e 20cm respectivamente;

• o filtro tem a forma de um cone circular reto, com diâmetro e altura medindo 15cm e 18cm respectivamente.



Nesse contexto, sabendo-se que a mistura atingiu a altura máxima de 12cm no filtro e que o volume do resíduo do pó de café que ficou no filtro era de 28πcm³, é correto afirmar que, no recipiente, o café atingiu uma altura de pelo menos:

A) 6,3 cm
B) 4 cm
C) 3 cm
D) 5,5 cm
E) 2 cm

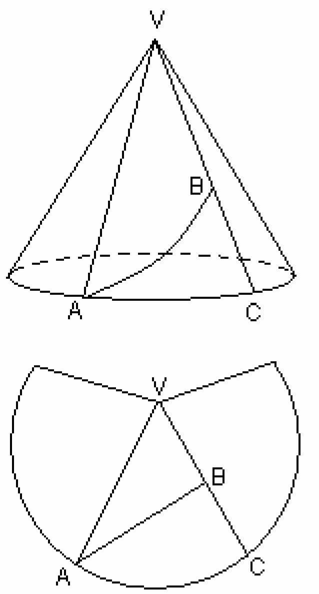
110. (UFC/09) Ao seccionarmos um cone circular reto por um plano paralelo a sua base, cuja distância ao vértice do cone é igual a um terço da sua altura, obtemos dois sólidos: um cone circular reto S_1 e um tronco de cone S_2 . A relação $\dfrac{volume\,(S_2)}{volume\,(S_1)}$ é igual a:

A) 33
B) 27
C) 26
D) 9
E) 3

111. (UPE/09) A secção meridiana de um cone é um triângulo isósceles de 96 cm de perímetro cuja altura vale 4/3 do raio da base do cone. Corta-se o cone por um plano paralelo à base e a uma distância do vértice igual a 1/3 da altura. Calcular a razão entre as áreas laterais do tronco e do cone parcial obtidos.

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

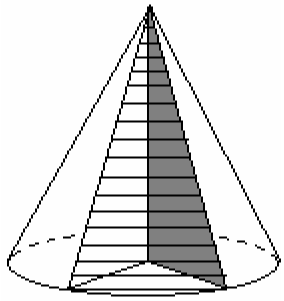
112. (UFPE/05- 2ª fase) Na ilustração abaixo, temos um cone reto com geratriz 10 cm e raio da base 6cm, assim como sua planificação. Uma formiga, inicialmente no ponto A da base do cone, poderá atingir o ponto B, caminhando sobre a superfície do cone. Se o ponto B é o ponto médio da geratriz VC e o arco AC da base mede $\dfrac{5\pi}{9}$ radianos, determine a menor distância d que a formiga percorrerá para alcançar o ponto B. Indique d^2.



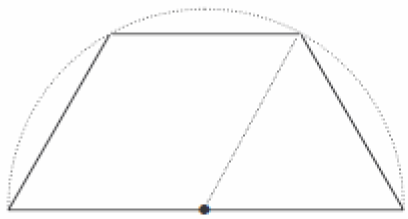
113. (PUC-RS/07) Uma pirâmide quadrangular regular tem aresta da base medindo π metros e tem o mesmo volume e altura de um cone circular reto. O raio do cone, em metros, mede

A) π
B) $\sqrt{\pi}$
C) π^2
D) 2π
E) $\dfrac{\pi}{2}$

114. (UFPE/05- 2ª fase) A figura a seguir ilustra a região sólida R de um cone reto, compreendida entre duas seções meridianas que formam, entre si, um ângulo θ. Indique o volume de R, sabendo que a altura do cone é 5, o raio da base é 3 e θ = 2 radianos.



115. (UFC/03- 2ª fase) Um trapézio isósceles está inscrito numa semi-circunferência de raio r, conforme a figura. Se a medida de sua base menor é igual à medida de seus lados não paralelos, calcule o volume do sólido que se obtém girando de 360º a região limitada por esse trapézio, em torno da reta que contém sua base maior.



GABARITO – RESOLVA EM CASA

85	C	**95**	A	**105**	C
86	31	**96**	D	**106**	03
87	C	**97**	D	**107**	B
88	E	**98**	D	**108**	04
89	03	**99**	03	**109**	E
90	50	**100**	E	**110**	C
91	48	**101**	C	**111**	D
92	02	**102**	**	**112**	75
93	*	**103**	01	**113**	B
94	B	**104**	A	**114**	15

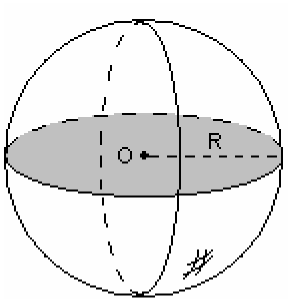
*93 – V, F, V, V, F

**102 - $h = \sqrt{\dfrac{S(m-1)}{\pi}}$

115 - $\pi.r^3$

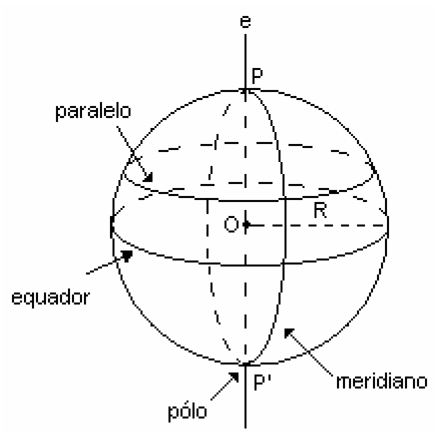
ESFERA

Dado um ponto O e um segmento de reta de medida R, denomina-se esfera o conjunto de pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R de O. Os pontos que estão a uma distância igual a R do centro O da esfera pertencem a sua superfície.



Elementos

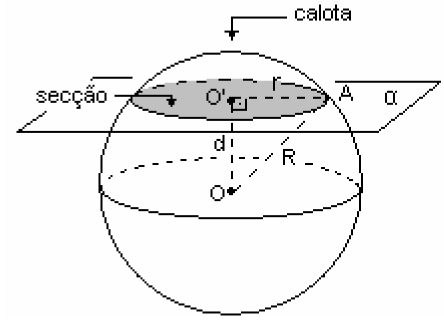
Na esfera da figura abaixo:



- R é o raio da esfera de centro O.
- Qualquer círculo que contém o centro da esfera é denominado círculo máximo.
- A reta **e** que passa pelo centro é o eixo da esfera.
- Os pólos P e P' são as interseções da superfície com o eixo.
- *Equador* é a secção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.
- *Paralelo* é uma secção (circunferência) perpendicular ao eixo. É "paralela" ao equador.
- *Meridiano* é uma secção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.
- A esfera também pode ser o sólido gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno do seu diâmetro.

Secção

Um plano α, ao interceptar uma esfera, a divide em dois sólidos cujas superfícies são uma secção e uma "calota esférica". Toda secção plana de uma esfera é um círculo.



Na figura acima, do triângulo OO'A vale a relação de Pitágoras:

$$\boxed{R^2 = r^2 + d^2}$$

Onde **R** é o raio da esfera, **r** é o raio da secção e **d** é a distância da secção ao centro da esfera.

Vamos resolver!

116. (UPE/04) Um plano intercepta uma esfera de centro O, segundo um círculo de diâmetro AB. O ângulo AÔB mede 90º e o raio da esfera, 12cm. O volume do cone, cuja base é o círculo e o vértice é o centro da esfera, é

A) 9π.
B) $30\sqrt{2}\pi$.
C) $48\sqrt{2}\pi$.
D) $144\sqrt{2}\pi$.
E) 1304π .

Área da superfície

A área da superfície de uma esfera de raio R é dada por:

$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

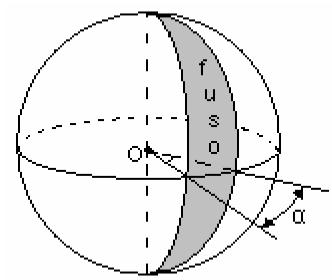
Volume

O volume de uma esfera de raio R é dado por:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

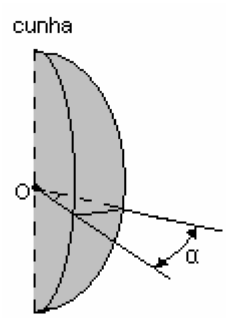
Fuso esférico e cunha esférica

● *Fuso esférico* é a região da superfície esférica compreendida entre dois semi-planos cuja reta comum contém o eixo da esfera.



$$A_{fuso} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90°}$$

● *Cunha esférica* é a região da esfera compreendida entre dois semi-planos cuja reta comum contém o eixo da esfera.



$$V_{cunha} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270°}$$

● Supondo que uma laranja fosse perfeitamente redonda, um "gomo" inteiro seria uma cunha e a "casca" do gomo seria um fuso.

Vamos resolver!

117. (CESGRANRIO) Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio R, composta por exatamente 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

A) $2\pi R^2$
B) $4\pi R^2$
C) $\frac{3\pi}{4}R^2$
D) $3\pi R^2$
E) $\frac{4\pi}{3}R^2$

118. (UFBA/02) Um tanque, na forma de um cilindro circular reto, deve ser construído de modo que sua área lateral seja 24π u.a., e seu volume seja igual ao de uma esfera cujo raio mede 3.u.c. Calcule, em u.c., a altura desse tanque.

119. (UFC) O volume de um cubo inscrito numa esfera de raio R, é

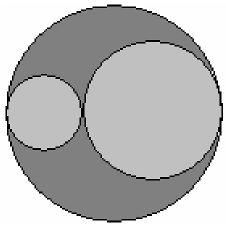
A) $\frac{8}{9}\sqrt{3}.R^3$
B) $\frac{8}{3}\sqrt{3}.R^3$
C) $\frac{2}{9}\sqrt{3}.R^3$
D) $\frac{2}{3}\sqrt{3}.R^3$
E) n.d.a.

120. (ITA) Um cone circular reto tem altura 12cm e raio da base 5cm. O raio da esfera inscrita neste cone, em cm:

A) $\frac{10}{3}$
B) $\frac{7}{4}$
C) $\frac{12}{5}$
D) 3
E) 2

Resolva em casa!

121. (UNIVASF/06) Na ilustração a seguir, as três esferas são tangentes, duas a duas, têm centros alinhados, e as esferas internas têm raios r e s. Qual o volume da região interior à esfera maior e exterior às duas esferas menores?



A) $4\pi rs(r + s)$
B) $4\pi(r^3 + s^3)$
C) $4\pi(r + s)^3$
D) $4\pi r(r + s)^2$
E) $4\pi s(r + s)^2$

122. (UPE/03) Assinale, na coluna I, as afirmativas *verdadeiras* e, na coluna II, as *falsas*.

I II

0 0 Se dois planos são perpendiculares, toda reta paralela a um deles é perpendicular ao outro.

1 1 Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então é perpendicular ao plano.

2 2 O volume de uma esfera inscrita em um cubo de 2 m de aresta é igual a $\frac{4\pi}{3}$ m³.

3 3 A projeção ortogonal de um triângulo sobre um plano é sempre um triângulo.

4 4 A altura de um cilindro eqüilátero é o dobro do raio da base.

123. (UPE/03) Considere uma esfera inscrita em um cilindro circular reto cuja altura é igual ao diâmetro da base.

I II

0 0 A relação entre o volume da esfera e o volume do cilindro é $\frac{2}{3}$.

1 1 A relação entre o volume da esfera e o volume do cilindro é $\frac{3}{2}$

2 2 O volume da esfera é $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro.

3 3 A relação entre o volume do cilindro e o da esfera é igual à relação entre a área total do cilindro e a área da esfera.

4 4 A relação entre a área total do cilindro e a área da esfera é $\frac{2}{3}$.

124. (UPE/03) Assinale, na coluna I, as afirmativas *verdadeiras* e, na coluna II, as *falsas*.

I II

0 0 A área total de um cubo, cuja diagonal mede $5\sqrt{5}$ cm, é igual a 250 cm².

1 1 O volume do sólido gerado pela rotação do retângulo de vértices A (0,2), B (0,5), C (2, 2) e D (2, 5), em torno do eixo dos y, é 20π unidades de volume.

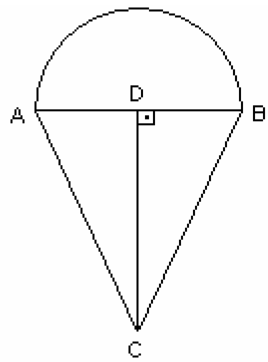
2 2 Por quatro pontos não alinhados passam um e um só plano.

3 3 Uma pirâmide tem, por vértice, um vértice de um cubo e por base, a face oposta. O volume da pirâmide é um terço do volume do cubo.

4 4 Uma esfera está inscrita em um cubo de aresta 6 cm, então o volume da esfera é 36π cm³ .

125. (UFBA) Na figura ao lado, tem-se:

- uma semicircunferência de raio AD e de comprimento igual a 6π u.c.;
- um triângulo isósceles ABC cuja altura relativa à base AB mede 8 u.c.



Sabendo-se que:

- a tangente do ângulo $\frac{A\hat{C}B}{2}$ é igual a x;
- o perímetro do triângulo ABC é igual a y u.c.;
- a área da superfície esférica de diâmetro AB é igual a zπ u.a.;
- o volume do sólido obtido pela rotação completa do triângulo ADC em torno de DC é iguala wπ u.v.

calcule o determinante de $\begin{vmatrix} \frac{y}{8} & 4x \\ \frac{z}{36} & \frac{w}{24} \end{vmatrix}$.

126. (UFPE) Considere E_1 uma esfera de raio unitário. Se, para cada i ≥ 1, C_i for o cubo inscrito na esfera E_i e E_{i+1} a esfera inscrita no cubo C_1, qual o inteiro mais próximo da soma das áreas das esferas E_1, E_2, E_3, E_4, ...?

127. (UPE) O volume de uma esfera inscrita em um cone eqüilátero cujo raio mede $6\sqrt{3}$ cm é, em centímetros cúbicos:

A) $144\sqrt{3}\pi$ D) 288π
B) $81\sqrt{3}\pi$ E) 216π
C) 144π

128. (UPE) Um cubo de aresta 2 cm tem em cada vértice o centro de uma esfera de raio 1 cm. Podemos afirmar que o volume da parte comum do cubo com as esferas é:

A) 8π cm³ D) 2π cm³
B) $\frac{4\pi}{3}$ cm³ E) $\frac{8\pi}{3}$ cm³
C) 4π cm³

129. (UFPE) A razão entre os volumes de duas esferas é $1{,}2^3$. Qual a razão entre as áreas de suas superfícies?

A) 1,44 D) 2,40
B) 1,32 E) 1,40
C) 1,20

130. (UPE) Considerando-se uma esfera de raio R, pode-se afirmar que:

I II

0 0 duplicando-se o raio, o volume da esfera quadruplica;

1 1 duplicando-se o raio, a área fica duplicada;

2 2 se V m³ é o volume da esfera e S m², a sua área, então V < S, sempre que 0 < R < 3;

3 3 se R = 3m, o volume da cunha esférica de ângulo $\frac{\pi}{3}$ radianos é 6πm³;

4 4 se R = 3m, a área do fuso esférico de ângulo $\frac{\pi}{3}$ radianos é 6πm².

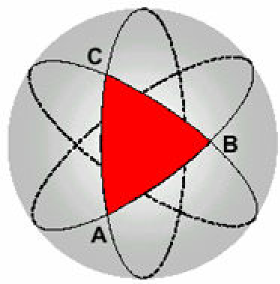
131. (UPE) Uma esfera de gelo com 50cm de raio está descongelando, uniformemente, de modo que seu raio decresce 1cm por minuto. Após 10 minutos, o volume do líquido resultante do degelo, em cm³, é

A) $\frac{244\pi}{3}$ D) $\frac{244.10^3}{3}$
B) $\frac{4.\pi.10^3}{3}$ E) 244.10^3
C) $\frac{244\pi 10^3}{3}$

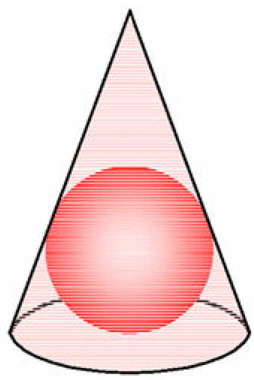
132. (UFCG) Uma caixa d'água cilíndrica reta, com altura de 30m e raio **R**, contém água até a altura de 20m. Uma esfera de raio **r** é jogada na caixa, ficando submersa e elevando o nível da água em um quarto da altura inicial. O raio **r** da esfera em função de **R** é

A) $\left(\frac{15}{4}R^2\right)^{\frac{1}{3}}$ D) $\left(\frac{17}{3}R^2\right)^{\frac{1}{5}}$
B) $\left(\frac{15}{2}R^4\right)^{\frac{1}{3}}$ E) $\left(\frac{17}{5}R^5\right)^{\frac{1}{2}}$
C) $\left(\frac{13}{4}R^3\right)^{\frac{1}{2}}$

133. (UFPE) Três pontos A, B e C estão numa superfície esférica de raio 20 e centro O. Os ângulos AÔB, AÔC e BÔC medem 90º. Considerando as regiões em que fica dividida a superfície esférica pelos círculos de raio 20 passando por A e B, A e C e B e C, calcule a área da parte da superfície limitada pelos arcos AB, AC e BC (em vermelho na figura abaixo) e indique sua divisão por 20π.



134. (UFPE) A figura abaixo ilustra a esfera de maior raio contida no cone reto de raio da base igual a **6** e altura igual a **8**, tangente ao plano da base do cone. Qual o inteiro mais próximo da metade do volume da região do cone exterior à esfera?



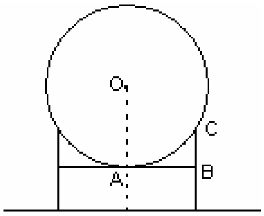
135. (UEFS) Sendo V_e o volume de uma esfera inscrita em um cilindro circular reto de volume V_c, pode-se afirmar que o volume compreendido entre o cilindro e a esfera é

A) $\frac{1}{3}V_c$ D) $\frac{3}{4}V_c$
B) $\frac{1}{2}V_c$ E) $\frac{2}{3}V_c$
C) $\frac{4}{7}V_c$

136. (UFPE) Seja **V** o volume da esfera circunscrita a um cubo de aresta **2**. Indique o inteiro mais próximo de V.

137. (UPE/07) Um reservatório de gás combustível de forma esférica está apoiado numa estrutura metálica, conforme a figura ao lado. Sabendo que a distância de A a B é de 4m e de B a C é de 2m, indique abaixo o valor aproximado do volume do reservatório em m³

A) 580.
B) 545.
C) 523.
D) 512.
E) 505.

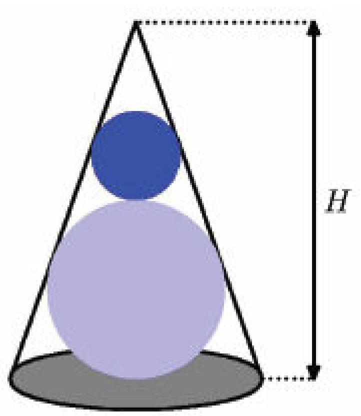


138. (UPE) Assinale coluna **I** para verdadeiro e **II** para falso.

I II

0 0 Um poliedro convexo que tem 6 faces triangulares e 5 faces quadrangulares tem 19 arestas.
1 1 Se dois planos são perpendiculares, toda reta contida em um é perpendicular ao outro.
2 2 A área de uma esfera de raio R é $4\pi R^2$
3 3 O volume da esfera inscrita em um cubo de 216m^3 de volume é 36πm^3.
4 4 Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

139. (UFRJ/08) Um cone circular reto de altura H circunscreve duas esferas tangentes, como mostra a figura a seguir. A esfera maior tem raio de 10 cm e seu volume é oito vezes o volume da menor.



Determine H.

140. (UECE/08) Uma esfera está circunscrita a um cubo cuja medida da aresta é 2m. A medida do volume da região exterior ao cubo e interior à esfera é

A) $4(\pi\sqrt{3}-2)$ m³
B) $3(\pi\sqrt{3}+2)$ m³
C) $4(\pi\sqrt{3}+2)$ m³
D) $3(\pi\sqrt{3}-2)$ m³

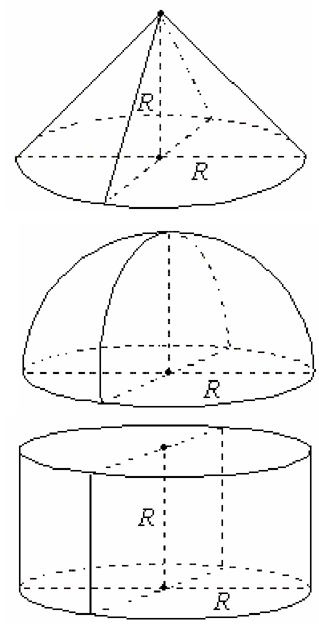
141. (UFC/09- 2ª fase) Seja C um cubo com medida de aresta igual a 100 (uc) .

a) Calcule o volume da esfera S inscrita no cubo C .

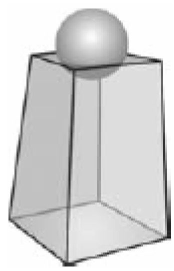
b) Secciona-se C em mil cubos congruentes, C_1, C_2 , ..., C_{1000} , e inscreve-se uma esfera S_k em cada cubo C_k , k = 1, ..., 1000. Calcule a soma dos volumes das esferas S_k, k = 1, ..., 1000

142. (UFPB) Se V_1, V_2 e V_3 são, respectivamente, os volumes do cone circular reto, hemisfério e cilindro circular representados abaixo, então é correto afirmar que:

A) $\frac{V_1}{1} = \frac{V_2}{2} = \frac{V_3}{3}$
B) $V_1 = 2V_2 = 3V_3$
C) $\frac{V_3}{1} = \frac{V_2}{2} = \frac{V_1}{3}$
D) $V_3 = 2V_2 = 3V_1$
E) $\frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{V_3}{3}$



143. (UFPB/09) A figura ao lado representa um troféu formado por uma bola de alumínio esférica maciça com 15 cm de diâmetro, apoiada em um pedestal de cristal com a forma de um tronco de pirâmide regular, com bases quadradas, cujos lados medem 25 cm e 20 cm respectivamente e a altura, 40 cm. A bola está encaixada em um buraco circular de diâmetro $5\sqrt{5}$ cm na base superior do pedestal. A partir dessas informações, identifique as afirmativas corretas:



I. A quantidade de alumínio no troféu é de $562{,}5\pi$cm^3.

II. O volume do pedestal é de 23.330 cm³.

III. O troféu tem 52,5 cm de altura.

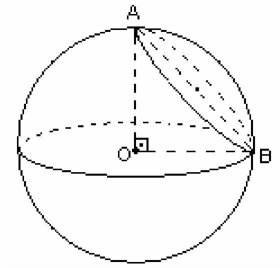
IV. A área da superfície de alumínio do troféu mede mais de $112{,}5\pi$ cm².

V. O volume do troféu é a soma dos volumes da bola e do pedestal.

144. (ITA/09) Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de 8cm de altura e de 60º de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}$ cm do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm³, é igual a

A) $416\pi/9$.
D) $512\pi/9$.
B) $480\pi/9$
E) $542\pi/9$
C) $500\pi/9$

145. (UFMG) Observe a figura a seguir. Um plano intercepta uma esfera segundo um círculo de diâmetro $\overline{AB}$. O ângulo AÔB mede 90º e o raio da esfera, 12 cm. O **volume** do cone de vértice O e base de diâmetro $\overline{AB}$ é:



A) 9π cm³
B) $36\sqrt{2}\pi$ cm³
C) $48\sqrt{2}\pi$ cm³
D) $44\sqrt{2}\pi$ cm³
E) $144\sqrt{2}\pi$ cm³

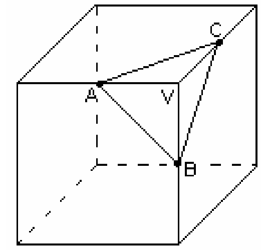
146. (UEFS/07.2) Um copo cilíndrico de raio 3cm e altura 12cm encontra-se numa posição vertical e totalmente vazio. Colocando-se em seu interior dezesseis bolinhas esféricas de gelo de mesmo raio 1,5cm, pode-se afirmar que, após o degelo total das bolinhas, o líquido obtido

A) transborda.
B) enche o copo até a borda.
C) ultrapassa o meio do copo sem enchê-lo.
D) atinge exatamente o meio do copo.
E) não chega ao meio do copo.

147. (UFPE/02) Derretendo uma peça maciça de ouro de forma esférica, quantas peças da mesma forma se pode confeccionar com este ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da anterior? Admita que não houve perda de ouro durante o derretimento.

A) 3
D) 21
B) 9
E) 27
C) 18

148. (UFC/08) As arestas de um cubo medem 1 unidade de comprimento. Escolhido um vértice *V* do cubo, considera-se um tetraedro *VABC* de modo que as arestas *VA*, *VB* e *VC* do tetraedro estejam contidas nas arestas do cubo (como descrito na figura) e tenham a mesma medida, $x = |VA| = |VB| = |VC|$, com $0 < x \leq 1$.



a) Calcule o volume do tetraedro *VABC* em função de *x*.

b) Considere a esfera inscrita nesse cubo. Determine o valor de *x* para que o plano determinado pelos pontos *A*, *B* e *C* seja tangente a essa esfera.

149. (UFC/08) Duas esferas de raios iguais a ***r*** são colocadas no interior de um tubo de ensaio sob a forma de um cilindro circular reto de raio da base ***r*** e altura ***4r***. No espaço vazio compreendido entre as esferas, a superfície lateral e as bases, superior e inferior, do tubo de ensaio, coloca-se um líquido. Então, o volume desse líquido é:

A) $\frac{2}{3}\pi r^3$
D) $2\pi r^3$
B) $\frac{3}{4}\pi r^3$
E) $4\pi r^3$
C) $\frac{4}{3}\pi r^3$

150. (UPE)

I II

0 0 As faces de um icosaedro regular são triângulos, logo ele tem 30 vértices.

1 1 Se a secção meridiana de um cilindro circular reto é um quadrado, o cilindro é equilátero.

2 2 Um cubo circunscrito a uma esfera de raio 2cm tem 8cm³ de volume.

3 3 A área total de um cubo de aresta “a” é $6a^2$.
4 4 Toda secção paralela à base de uma pirâmide, divide as arestas laterais e a altura, na mesma razão.

GABARITO – RESOLVA EM CASA

121	A	**136**	22
122	F,V,V,F,V	**137**	C
123	V,F,V,V,V	**138**	V,F,V,V,F
124	V,F,F,V,V	**139**	40
125	04	**140**	A
126	19	**141**	a) $\frac{4}{3}\pi 50^3$; b) $\frac{4}{3}\pi 50^3$
127	D	**142**	A
128	B	**143**	I, III e IV
129	A	**144**	A
130	F,F,F,V,V	**145**	E
131	C	**146**	C
132	A	**147**	E
133	10	**148**	a) $\frac{x^3}{6}$; b) $\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{R\sqrt{6}}{2}$
134	94	**149**	C
135	A	**150**	F,F,V,V,V