Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS

APOSTILA DE CÁLCULO I

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO REAL
Parte I

Prof[a]. MSc. Adriana de Fátima Vilela Biscaro

Veremos nesta apostila que a *DERIVADA*, representa a inclinação de uma curva num ponto. Posteriormente, apresentaremos outras aplicações práticas, em diversos ramos da Física, Engenharia, Economia etc.

A reta tangente.

Suponha que a reta r da figura vá se aproximando da circunferência até tocá-la num **único** ponto.

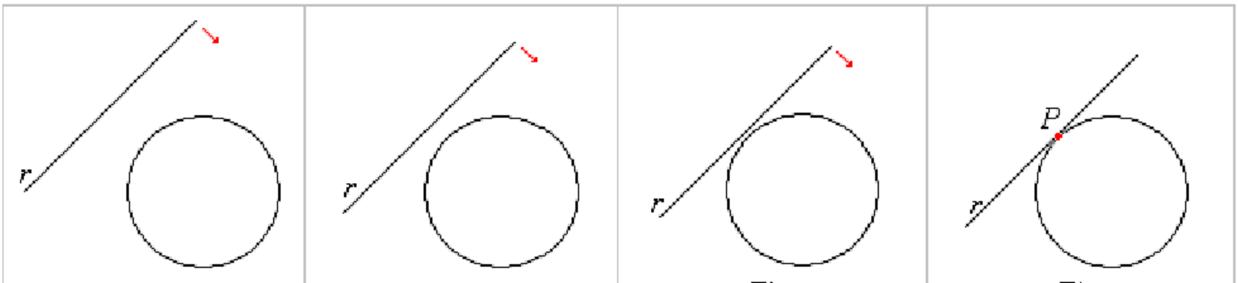


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4

Na situação da figura 4, dizemos que a reta r é ***tangente*** a circunferência no ponto P.

Exemplos de ***retas tangentes*** (no ponto P) a algumas curvas:

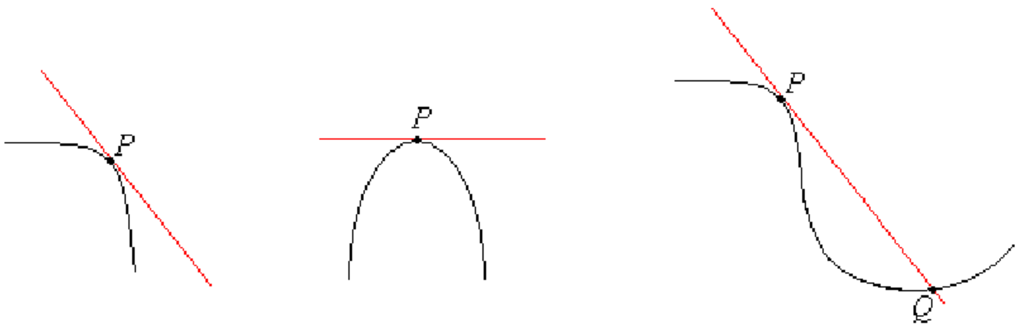


Fig. 5 Fig. 6 Fig. 7

Na figura 7, apesar da reta tocar a curva em dois pontos, ela tangencia a curva em P, como na figura 4.

Estas retas tocam *suavemente* as curvas nos pontos P indicados.

Exemplos de retas que ***não são tangentes*** (no ponto Q) a algumas curvas:

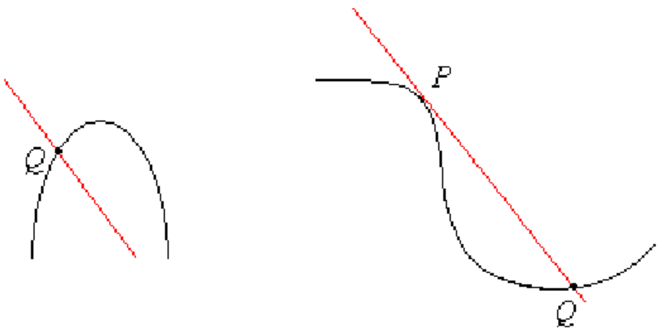


Fig. 8 Fig. 9.

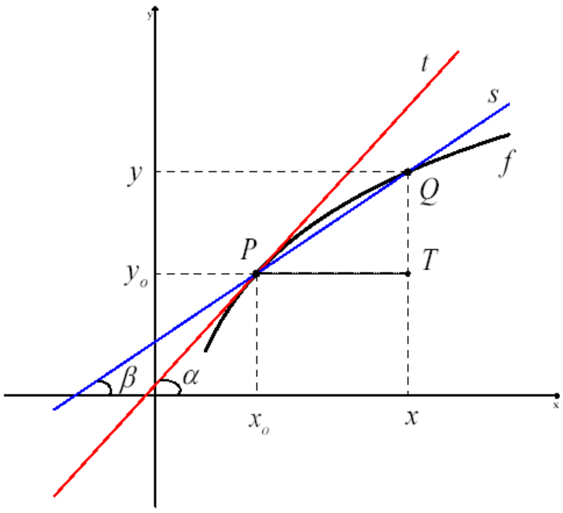
Estas retas não tocam suavemente as curvas nos pontos indicados como no exemplo da circunferência (fig. 4). Elas “cortam” , “penetram” as curvas.

Vamos determinar a equação da reta tangente a uma função (uma curva) num ponto do seu domínio.

Seja $y = f(x)$ uma curva definida num intervalo aberto *I*. Considere $P(x_o, y_o)$, sendo $y_o = f(x_o)$, um ponto ***fixo*** e $Q(x, y)$ um ponto ***móvel***, ambos sobre o gráfico de f.

Seja s a reta que passa pelos pontos P e Q e considere β o ângulo de inclinação de s.

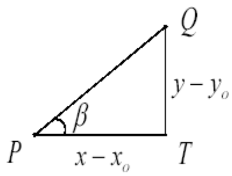
Seja t a ***reta tangente*** ao gráfico de f no ponto P e considere α o ângulo de inclinação de t.



$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta y = y - y_o \\ \Delta x = x - x_o\end{array}}$$

Considerando o triângulo retângulo *PTQ*, obtemos o coeficiente angular da reta s como

$$tg(\beta) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_o}{x - x_o}.$$



Suponha que o ponto Q mova-se **sobre o gráfico de f** em direção ao ponto P. Desta forma, a reta s se aproximará da reta t. O ângulo β se aproximará do ângulo α, e então, a $tg(\beta)$ se aproximará da $tg(\alpha)$. Usando a notação de limites, é fácil perceber que

$$\lim_{Q \to P} tg(\beta) = tg(\alpha).$$

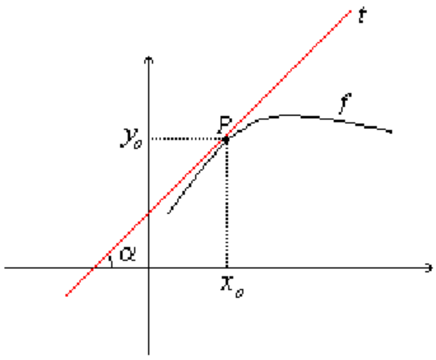
Mas quando $Q \to P$ temos que $x \to x_o$. Desta forma, o limite acima fica

$$\lim_{Q \to P} tg(\beta) = tg(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o} \frac{y - y_o}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = tg(\alpha).$$

Assim $\displaystyle \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = tg(\alpha).$

Definição: Seja $y = f(x)$ uma curva e $P(x_o, y_o)$ um ponto sobre o seu gráfico. O coeficiente angular m da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é dado pelo limite

$$m = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}, \text{ quando este existir.}$$



$$m = tg(\alpha)$$

$$y_o = f(x_o)$$

Equação da reta tangente

Podemos agora determinar a equação da reta tangente t, pois já conhecemos o seu coeficiente angular e um ponto do seu gráfico $P(x_o, y_o)$.

A equação da reta tangente t é:

a) $(y - y_o) = m(x - x_o)$, se o limite que determina m existir;

b) A reta vertical $x = x_o$ se $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ for infinito.

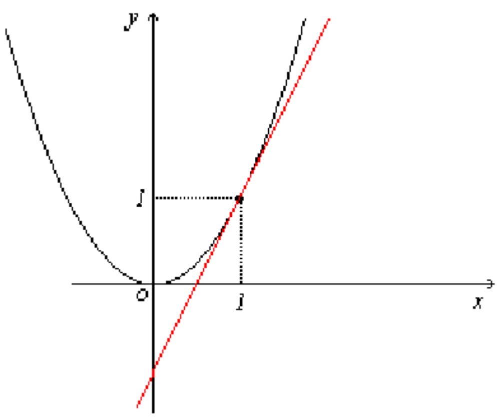
Exemplo 19. Determine a equação tangente a parábola $f(x) = x^2$ no ponto de abscissa $x_o = 1$.

Solução: Temos que determinar dois termos y_o e m.

$y_o = f(x_o) \Rightarrow y_o = f(1) = 1^2 = 1$.

$$m = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \cdots = 2.$$

Logo a equação da reta tangente é $(y - 1) = 2(x - 1)$ ou $y = 2x - 1$.



Exercícios:

1. Encontrar uma equação para a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P(1,1).

2. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abscissa é 2.

A derivada de uma função num ponto

O limite $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ é muito importante, por isso receberá uma denominação especial.

Definição: Seja $y = f(x)$ uma função e x_o um ponto do seu domínio. Chama-se derivada da função f no ponto x_o e denota-se $f'(x_o)$ (lê-se f linha de x_o), o limite

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}, \text{ quando este existir.}$$

Forma alternativa para derivada:

Se fizermos $\Delta x = x - x_o$, obtemos a seguinte forma para $f'(x_o)$:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}.$$

Como vimos na seção anterior, esse limite nos dá a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Portanto, geometricamente, a derivada da função y = f(x) no ponto x_0, representa a inclinação da curva neste ponto.

O termo "derivada" é usado porque a função *f'* deriva da função *f* por meio de um limite.

A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Outras notações para a derivada da função $y = f(x)$ num ponto x qualquer:

- $y'(x)$ (lê-se: y linha de x ou derivada de y em relação a x);
- $D_x f$ (lê-se: derivada da função f em relação à x);
- $\dfrac{dy}{dx}$ (lê-se: derivada de y em relação à x).

Exemplo 20. Dada a função $f(x) = x^2 - x + 1$, determine $f'(2)$. Use as **duas formas** da definição.

$\Rightarrow$ Usando $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 1 - 3}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3 .$$

$\Rightarrow$ Usando $f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x) + 1 - 3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 2 - \Delta x - 2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3 + \Delta x) = 3 + 0 = 3 .$$

Teorema: Toda função derivável num ponto é contínua neste ponto.

Exercícios:

1. Encontre a derivada em relação a x de $f(x) = x^2 + 1$ e use-a para encontrar a equação da reta tangente a $y = x^2 + 1$ em $x=2$.
2. Dada $f(x) = 5x^2 + 6x - 1$, encontre $f'(2)$.
3. Dada $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$, encontre $f'(x)$.
4. Dada $f(x) = \sqrt{x}$, encontre $f'(4)$.
5. Determinar a equação da reta tangente às seguintes curvas, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico em cada caso.

a) $f(x) = x^2 - 1$; $x=0$
b) $f(x) = x^2 - 3x + 6$; $x = -1$

6. Dadas as funções *$f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$, determinar:*

a) $f'(1) + g'(1)$
b) $2f'(0) - g'(-2)$
c) $f(2) - f'(2)$
d) $[g'(0)]^2 + 1/2g'(0) + g(0)$

7. *Usando a definição, determinar a derivada das seguintes funções:*

a) $f(x) = 1 - 4x^2$
b) $f(x) = 2x^2 - x - 1$
c) $f(x) = 1/x+2$
d) $f(x) = 1-x/x+3$

8. *Dada a função $f(x)= 2x^2 - 3x - 2$, determinar os intervalos em que:*

a) $f'(x) > 0$ *b)* $f'(x) < 0$

CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DERIVÁVEIS

TEOREMA: Toda função derivável num ponto x_1 é contínua nesse ponto

Prova: (i) $f(x_1)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to x_1} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$

Por hipótese, $f(x)$ é derivável em x_1. Logo $f'(x_1)$ existe e, pela fórmula

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Concluímos que $f(x_1)$ deve existir para que o limite tenha significado.

Derivadas laterais

Lembre-se que o limite de uma função num ponto somente existe se os limites laterais existem e são iguais. Como a derivada de uma função num ponto é um limite, esta derivada somente existirá em condições análogas.

Definição: Seja $y = f(x)$ uma função e x_o um ponto do seu domínio. A derivada à **direita** de f em x_o, denotada por $f_+'(x_o)$ é definida por

$$f_+'(x_o) = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Definição: Seja $y = f(x)$ uma função e x_o um ponto do seu domínio. A derivada à **esquerda** de f em x_o, denotada por $f_-'(x_o)$ é definida por

$$f_-'(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Uma função é derivável num ponto quando as derivadas laterais (a direita e a esquerda) existem e são iguais neste ponto.

Exemplo:
Seja a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, se x < 2 \\ 7 - x, se x \geq 2 \end{cases}$$

a) Mostre que f é contínua em 2.
b) Encontre $f'_+(2)$ e $f'_-(2)$.

a) Esta função é contínua em 2.
De fato, existe $f(2) = 5$; existe o limite:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(7-x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-1) = 5$$

E finalmente,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 5$$

b) Obtemos $f'_{+}(2)$ usando a definição:

$$f'_{+}(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{x\to 2}\frac{7-x-5}{x-2}$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{x-2}$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x-2}$$

$$f'_{+}(2) = -1$$

Usando a definição, obtemos f'_{-}, temos;

$$f'_{-}(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$f'_{-}(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{3x-1-5}{x-2}$$

$$f'_{-}(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{3x-6}{x-2}$$

$$f'_{-}(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{3(x-2)}{x-2}$$

$$f'_{-}(2) = 3$$

Como

$$f'_{+}(2) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq f'_{-}(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

Concluímos que não existe o

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, Portanto, a função f(x) não é derivável em $x_0 = 2$

Obs.: Quando as derivadas laterais existem e são diferentes num ponto, dizemos que este é um ponto anguloso do gráfico da função. Neste caso, não existe reta tangente num ponto anguloso.

Exercícios:

1. Mostre que a função $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 sex < 1 \\ - x + 4 sex \geq 1 \end{cases}$ não é derivável em x=1.
2. Seja $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 sex < 1 \\ 2x + 1 sex \geq 1 \end{cases}$

a) Mostre que g é derivável em p =1 e calcule g'(1).
b) Esboce e gráfico de g.

Regras de derivação

Vamos apresentar algumas regras que irão facilitar o cálculo das derivadas das funções sem recorrer a definição.

1. Derivada de uma função constante.

Se $f(x) = c$, c é uma constante real, então $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 .$$

2. Derivada da função potência.

Se n é um inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Prova: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$

Usando o *Binômio de Newton* para expandir $(x+\Delta x)^n$, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x) + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x) + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right] = nx^{n-1} .$$

Exemplo: Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = x$	b) $f(x) = x^2$	c) $f(x) = x^5$

a) $f(x) = x^1 \Rightarrow f'(x) = 1x^{1-1} = 1$. Logo $f'(x) = 1$.
b) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$. Logo $f'(x) = 2x$.
c) $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$. Logo $f'(x) = 5x^4$.

3. Derivada do produto de uma constante por uma função.

Se $f(x)$ é uma função derivável e c é uma constante real, então a função $g(x)=cf(x)$ tem derivada dada por $g'(x)=cf'(x)$.

Prova: $g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}=$

$=c\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=cf'(x).$

Exemplo: Se $f(x)=5x^3$ então $f'(x)=5(3x^2)=15x^2$.

4. Derivada de uma soma de funções.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são função deriváveis, então a função $h(x)=f(x)+g(x)$ tem derivada dada por $h'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Pesquise a demonstração deste resultado num livro de cálculo.

Exemplo: Se $f(x)=4x^3+3x^2-x+5$ então $f'(x)=12x^2+6x-1$.

5. Derivada de um produto de funções.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são função deriváveis, então a função $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ tem derivada dada por $h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

Pesquise a demonstração deste resultado num livro de cálculo.

Exemplo:
Se $f(x)=(x^3-x)(2-x)$ então $f'(x)=(3x^2-1)(2-x)+(x^3-x)(0-1)=-4x^3+-6x^2+2x-2$.

6. Derivada de um quociente de funções.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são função deriváveis, então a função $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem derivada dada por

$$h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Pesquise a demonstração deste resultado num livro de cálculo.

Exemplo:

Se $f(x)=\dfrac{5x^2-8}{2x}$ então $f'(x)=\dfrac{(10x)\cdot(2x)-(5x^2-8)\cdot(2)}{4x^2}=\ldots=\dfrac{5x^2+8}{2x^2}$.

Proposição. Se $f(x)=x^{-n}$ ***onde n é um inteiro positivo e x ≠ 0, então*** $f'(x)=-n.x^{-n-1}$**.**

Prova: Podemos escrever $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$. Aplicando a regra do quociente, temos:

$$f'(x)=\frac{x^n.0-1.nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$

$$f'(x)=-n.x^{n-1}.x^{-2n}$$

$$f'(x)=-nx^{-n-1}$$

Exercícios:

1. Encontrar a derivada das funções dadas:

a) $f(x) = 3x^2 + 5$

b) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

c) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$

d) $f(x) = 3x+\sqrt{x}$

e) $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

f) $f(x) = 3x+\dfrac{1}{x}$

g) $f(x)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}$

h) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

i) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

j) $f(x)=\dfrac{3x^2+3}{5x-3}$

k) $f(x)=(3x^5-1)(2-x^4)$

l) $f(x) = (7x - 1)(x+4)$