



4 - PROBABILIDADES

4.1 Conceito

Na análise combinatória estudamos regras de contagem do número de modos de ocorrência de certos acontecimentos e do número de agrupamentos que podem ser feitos com uma quantidade finita de objetos. Na teoria das probabilidades procuramos quantificar a chance de que tais acontecimentos ocorram de determinadas maneiras e de que tais agrupamentos obedeçam determinadas condições. Criada a partir de jogos de azar, esta teoria desenvolveu-se nos últimos séculos e é a base sobre a qual se assenta a teoria estatística, instrumento valiosíssimo nos mais variados ramos do conhecimento das ciências exatas, humanas e biológicas.

4.2 Experimento aleatório

Denominamos experimento aleatório(ou casual) a todo experimento que, repetido em condições consideradas idênticas, pode apresentar resultados diferentes. A variabilidade do resultado é devida ao que chamamos de acaso. O lançamento de um dado não viciado, a retirada de uma carta em um baralho, a retirada de uma bola em uma urna são exemplos de experimentos aleatórios.

4.3 Probabilidade da ocorrência de um evento

$P(A)$ = número de casos favoráveis a A número de resultados possíveis de um experimento

Exemplo: Em uma urna, existem 5 bolas vermelhas, 2 bolas amarelas e 6 bolas brancas. Qual é a probabilidade de, em um única retirada, um bola vermelha ser a escolhida ?

4.4 Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos são chamados mutuamente exclusivos quando não possuem interseção. Sendo assim : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) > 0.$$

Quando eles tiverem intercessão, a probabilidade da ocorrência da união destes dois eventos pode ser calculada pela fórmula : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercício : Em uma escola de idiomas, estudam 300 alunos.200 estudam inglês ,120 estudam francês e 50 estudam outras línguas. Determine qual é a probabilidade de, escolhido ao acaso, um determinado aluno :

- Estudar inglês e francês
- Estudar somente inglês
- Estudar somente francês

4.5 Probabilidade condicional

Vamos supor que no lançamento de um dado alguém aposte que vai obter mais do que 3 pontos. A probabilidade de que ele ganhe esta aposta é a probabilidade de ocorrer o evento $A = \{4,5,6\}$. Como o espaço amostral $W = \{1,2,3,4,5,6\}$ é equiprovável, temos $P(A) = 3/6 = 1/2$. Após lançar o dado, uma pessoa avisa que o resultado obtido é um número ímpar de pontos. Com esta informação, o apostador já sabe que o resultado obtido foi 1 ou 3 ou 5 pontos e ele só terá ganhado se o resultado foi 5 pontos. Assim, ele tem uma chance em três de ter ganho a aposta ou seja $1/3$. Esta é a probabilidade de ele ter ganho a aposta, após a informação ter sido dada. Por isso, ela é chamada de condicional.

Agora repare que para escrever a probabilidade $1/3$ levamos em conta que tínhamos 3 chances após saber que ocorreu o evento $B = \{1,3,5\}$ e, destas três, a única chance do apostador de ganhar é ocorrer o evento $A \cap B = \{5\}$. Então, neste caso:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$



Dividindo numerador e denominador por $n(\Omega)$, vem que :

$$P(A | B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Este exemplo motiva a definição de probabilidade condicional, que é a seguinte: Exercício: Considerando os dados do exemplo anterior, calcule, utilizando a fórmula acima qual é a probabilidade de sair um número maior do que três, sabendo que no sorteio saiu um número ímpar.

Exercício: Se dois eventos são tais que $P(A) = 0,40$, $P(B) = 0,60$ e $P(A \cap B) = 0,20$, determine:

- a) $P(A/B)$ b) $P(B/A)$

4.6 Regra da multiplicação

Na última fórmula, isolando o numerador, temos: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Em palavras, temos a seguinte regra para a probabilidade da ocorrência ao mesmo tempo de dois eventos : a probabilidade de ocorrer A e B é igual a probabilidade de A multiplicada pela probabilidade condicional de B dado A. Esta regra pode ser estendida para mais de dois eventos, sendo muito útil especialmente para eventos compostos de mais de duas etapas (extrações com ou sem reposição, lançamentos sucessivos, etc). Nestes casos, se queremos calcular a probabilidade de ocorrência de uma sucessão de eventos A, B, C, etc, basta multiplicar a probabilidade de A pela probabilidade de B, supondo que A ocorreu, pela probabilidade de C, supondo que A e B ocorreram, etc

4.7 Exercícios

1) No lançamento de um dado sabe-se que o resultado foi um número de pontos maior que 3. Qual a probabilidade de ser um número par de pontos ?

- a) 2/3 b) 2/5 c) 1/3 d) 1/4

2) No lançamento de um dado sabe-se que o resultado foi um número par de pontos. Qual é a probabilidade de ser um número maior do que 3?

- a) 1/2 b) 2/3 c) 1/5 d) 1/4

3) Uma caixa contém 11 bolas numeradas de 1 até 11. Retirando-se uma delas ao acaso, observa-se que a mesma traz um número ímpar. Determinar a probabilidade de que este número seja menor do que 5.

- a) 1/2 b) 1/5 c) 1/3 d) 2/7

4) No sorteio de um número natural de 1 a 20, tendo sido observado um número par, qual a probabilidade de ser também um número primo ?

- a) 1/3 b) 2/5 c) 1/2 d) 1/10

5) Em dois lançamentos sucessivos de uma moeda sabe-se que pelo menos numa das vezes deu cara. Qual a probabilidade de ter dado cara ambas as vezes?

- a) 1/3 b) 1/2 c) 1/5 d) 1/6

6) Um casal tem dois filhos e sabe-se que um deles é homem. Qual a probabilidade de o outro ser mulher ?

- a) 2/5 b) 2/3 c) 1/3 d) 1/4

7) Em dois lançamentos sucessivos de um dado sabe-se que num deles foram obtidos 6 pontos. Qual a probabilidade de a soma dos pontos dos dois lançamentos ser maior do que 10 ?

- a) 2/11 b) 3/11 c) 6/11 d) 7/11

8) De uma urna contendo 4 bolas verdes e 2 amarelas serão extraídas, sucessivamente, sem reposição, 2 bolas.

- a) Se a primeira bola sorteada for amarela, qual a probabilidade de a segunda também ser amarela ?



- R: 1/5
- b) Qual a probabilidade de ambas as bolas serem amarelas ? R: 1/15
- e) Qual a probabilidade de ser uma bola de cada cor ? R: 8/15
- c) Qual a probabilidade de ambas as bolas serem verdes ? R: 2/5
- d) Qual a probabilidade de a primeira bola sorteada ser verde e a segunda amarela ? R: 4/15
- e) Qual a probabilidade de ser uma bola de cada cor ? R: 8/15
- 9) No sorteio da loto, são sorteados sucessivamente, sem reposição, cinco números natural distintos de 0 a 99. Qual a probabilidade de serem sorteados cinco números menores que 50 ?
a) 32/123 b) 35/200 c) 1081/38412 d) 234/1234
- 10) Um teste tem cinco alternativas das quais apenas uma é correta. Se uma pessoa for respondendo ao acaso até descobrir a alternativa correta, qual a probabilidade de que ele acerte na terceira tentativa ?
a) 1/5 b) 2/7 c) 1/3 d) 4/5
- 11) Se A e B são eventos independentes, $P(A) = 0,2$ e $P(B) = 0,5$ qual é o valor de $P(A \cap B)$?
a) 0,5 b) 0,1 c) 0,7 d) 0,8
- 12) Se $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 2/5$, calcule $P(A \cup B)$ em cada caso :
a) sendo A e B eventos independentes R: 3/5
b) Sendo A e B eventos mutuamente exclusivos R: 11/15
- 13) Lançando-se simultaneamente um dado e uma moeda, determine a probabilidade de se obter 3 ou 5 no dado e cara na moeda
a) $1/2$ b) $1/3$ c) $1/6$ d) $2/5$
- 14) Um determinado jogador de basquetebol tem probabilidade 0,75 de acertar cada lance livre que executa. Ao fazer dois lances livres, qual é a probabilidade de ele acertar os dois ?
a) 0,5625 b) 0,3234 c) 0,7867 d) 0,1278
- 15) A probabilidade de que o filho de um casal nasça com olhos azuis é de $1/4$. Se o casal tiver dois filhos, qual a probabilidade de :
a) ambos nascerem com olhos azuis ? R: 1/16
b) nenhum dos dois ter olhos azuis ? R: 9/16
- 16) Um atirador tem probabilidade 0,6 de acertar um alvo em cada tentativa que faz. Atirando sucessivamente até acertar o alvo, qual a probabilidade de que o faça apenas na terceira tentativa ?
a) 0,024 b) 0,078 c) 0,045 d) 0,096
- 17) Jogando uma moeda 4 vezes, qual a probabilidade de obter a sequência de resultados cara, cara, coroa, coroa ?
a) 1/15 b) 1/14 c) 1/16 d) 2/13
- 18) Numa urna há três bolas azuis, duas brancas e uma marrom. Extraindo-se 3 bolas sucessivamente, com reposição, qual a probabilidade de saírem três bolas de mesma cor ?



- a) $1/5$ b) $2/7$ c) $3/5$ d) $1/6$

19) Num lançamento de dois dados honestos, calcular a probabilidade de :

a) a soma dos pontos ser ímpar R: $1/2$

b) o produto dos pontos ser ímpar R: $1/4$

20) Uma prova consta de 5 testes , cada um com 4 alternativas das quais apenas um é correta. Para alguém que esteja respondendo aleatoriamente uma alternativa em cada teste, qual a probabilidade de :

a) acertar os 5 testes ? R: $1/1024$

b) errar os 5 testes ? R: $243/1024$

c) acertar apenas o primeiro teste ? R: $81/1024$

d) acertar apenas um dos testes ? R: $405/1024$

21) Um casal planeja ter quatro filhos. Admitindo-se probabilidades iguais para ambos os sexos, qual a probabilidade de que venha a ter um homem e três mulheres em qualquer ordem) ?

a) $1/4$

b) $1/3$

c) $1/2$

d) $1/5$

22) (PUC) Uma urna contém apenas cartões marcados com números de três algarismos distintos, escolhidos de 1 até 9. Se, nessa urna, não há cartões com números repetidos, calcule a probabilidade de ser sorteado, um cartão com número menor do que 500 é de :

a) $2/3$

b) $1/3$

c) $4/9$

d) $4/5$

23) (UNESP) Numa gaiola estão 9 camundongos rotulados de 1 até 9. Selecionando-se 2 camundongos, ao acaso, (todos tem igual possibilidade de ser escolhido), a probabilidade de que na seleção todos dois tenham rótulo ímpar é de ?

a) $0,211.....$

b) $0,766.....$

c) $0,1333...$

d) $0,2777...$

24) (FUVEST) No jogo da sena seis números distintos são sorteados dentre 1, 2, ..., 50. a probabilidade , de que, numa extração, os seis números sorteados sejam ímpares, vale aproximadamente :

a) 1%

b) 3%

c) 4%

d) 5%

25) (FUVEST) Escolhe-se, ao acaso, 03 vértices de um cubo. A probabilidade, de que, estes vértices pertençam a uma mesma face é de :

a) $3/8$

b) $1/2$

c) $2/5$

d) $3/7$

26) (UNESP) Lançando-se simultaneamente dois dados não viciados, a probabilidade de que suas faces superiores exibam soma igual a 7 ou a 9 é :

a) $5/18$

b) $3/18$

c) $4/17$

d) $5/6$

27) (FATEC) Considere todos os números de 05 algarismos distintos obtidos pela permutação dos algarismos 4, 5, 6, 7 e 8. Escolhendo-se um destes números ao acaso, a probabilidade dele ser ímpar é de :

a) $1/5$

b) $2/5$

c) $4/5$

d) $5/6$

28) (FEI) Uma urna contém 3 bolas verdes, 4 bolas amarelas, e 2 bolas pretas. Duas bolas são retiradas ao acaso e sem reposição. A probabilidade de ambas serem da mesma cor é de :

a) $1/2$

b) $3/5$

c) $5/18$

d) $5/8$

29) (FEI) Em uma pesquisa realizada em uma faculdade foram feitas duas perguntas aos alunos. 120 responderam "sim" a ambas, 300 responderam à primeira, 250 responderam "sim" à segunda e 200 responderam "não" a ambas. Se um aluno for escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter respondido "não" à primeira pergunta ?

a) $1/3$

b) $3/4$

c) $4/11$

d) $11/21$

30) (UEL) Uma urna tem 100 cartões numerados de 101 a 200. A probabilidade de se sortear um cartão desta urna e o número nele marcado ter os três algarismos distintos entre si é de :

a) $18/25$

b) $1/22$

c) $21/55$

d) $3/7$



32) (MACK) dois rapazes e duas moças ocupam ao acaso os quatro lugares de um banco. A probabilidade de não ficarem do mesmo lado duas pessoas e do mesmo sexo é de :

- a) $3/8$ b) $1/2$ c) $7/11$ d) $3/7$

33) (MACK) Num grupo de 12 professores, somente 5 são de matemática. Escolhidos ao acaso, 3 professores do mesmo grupo, a probabilidade de , no máximo um deles ser de matemática é de :

- a) $3/8$ b) $1/2$ c) $2/5$ d) $1/3$

34) (PUC) os 36 cães existentes em um canil são de apenas três raças: poodle, dálmata e boxer. Sabe-se que o total de cães da raça poodle e dálmata excede o número de cães da raça boxer em 6 unidades, enquanto que o total de cães da raça dálmata e boxer é o dobro do número de cães da raça poodle. Nessas condições, escolhendo-se ao acaso, um cão deste canil, a probabilidade dele ser da raça poodle é de :

- a) $3/8$ b) $3/11$ c) $2/5$ d) $3/7$

35) (UEL) considere um cubo e suas arestas. A probabilidade de escolhermos um par de arestas distintas desse cubo e elas serem paralelas entre si é de :

- a) 0,02 b) 0,087 c) 0.075 d) 0,345

36) (UNESPE) o resultado de uma pesquisa realizada pelo IPESPE sobre o perfil de fumantes e publicada pela revista VEJA de 3/6/98 mostra que,, num grupo de 1000 pessoas, 17 % fumam e, dentre os fumantes, 44 % são mulheres. Se neste grupo de 1000 pessoas uma é escolhida ao acaso, a probabilidade dele ser fumante e mulher é de, aproximadamente :

- a) 22% b) 20% c) 32% d) 3 3%

37) (ANPAD)Uma empresa de telefonia celular oferece aos seus clientes sete cores diferentes de aparelhos celulares,podendo o comprador optar entre dois modelos diferentes. Sabendo que os aparelhos celulares podem ser adaptados em três planos :“fale pouco”, “fale sempre” ou “fale muito”,então na compra de um celular o número de possibilidades diferentes que o comprador possui é de :

- a) 12 b) 14 c) 24 d) 42

38) (ANPAD)As probabilidades de que duas pessoas A e B sejam promovidas na empresa DraxVax são $P(a)=1/3$ e $P(B)=3/5$.A probabilidade de que ambas as pessoas sejam promovidas é:

- a) $1/5$ b) $3/10$ c) $3/5$ d) $3/8$

39) (ANPAD) Uma pasta de arquivo contém n folhas numeradas de 1 a n. Três folhas foram retiradas ao acaso do arquivo e não foram repostas. A probabilidade de as três folhas retiradas serem consecutivas é de :

- a) $(n2)! 3!$ sobre n! b) $(n3)!$ sobre n! c) $(n2)!$ sobre 3!n! d) $6(n2)(n1)$

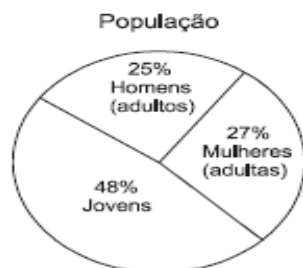
40) (CEF98)Desejando limpar uma prateleira, a arrumadeira retirou de lá uma coleção de livros numerados de 1 a 9. Depois, ela recolocou aleatoriamente os livros na prateleira. É claro que ela pode tê-los colocado na ordem normal, ou seja, 1, 2, 3 etc. No entanto, a chance de isso ocorrer é apenas 1 em:

- a) 16 660 b) 40 320 c) 362880 d) 368040 e) 406 036

41) (UFMG-2008)Considere uma prova de Matemática constituída de quatro questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada uma, das quais apenas uma é correta. Um candidato decide fazer essa prova escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de esse candidato acertar, nessa prova, exatamente uma questão é:

- a) $27/64$ b) $27/256$ c) $9/64$ d) $9/256$

42) (FUVEST 2006) Um recenseamento revelou as seguintes características sobre a idade e a escolaridade da população de uma cidade.



Escolaridade	Jovens	Mulheres	Homens
Fundamental incompleto	30%	15%	18%
Fundamental completo	20%	30%	28%
Médio incompleto	26%	20%	16%
Médio completo	18%	28%	28%
Superior incompleto	4%	4%	5%
Superior completo	2%	3%	5%

Se for sorteada, ao acaso, uma pessoa da cidade, a probabilidade de esta pessoa ter curso superior (completo ou incompleto) é de:

- a) 6,12% b) 7,27% c) 8,45% d) 9,57% e) 10,23%

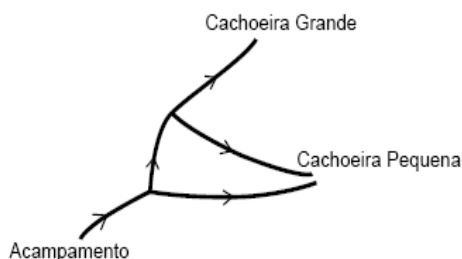
43) (FUVEST 2002) - Dois triângulos congruentes, com lados coloridos, são indistinguíveis se se podem ser sobrepostos de tal modo que as cores dos lados coincidentes sejam as mesmas. Dados dois triângulos equiláteros congruentes, cada um de seus lados é pintado com uma cor escolhida dentre duas possíveis, com igual probabilidade. A probabilidade de que estes triângulos sejam indistinguíveis é de :

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{9}{16}$ d) $\frac{5}{16}$ e) $\frac{15}{32}$

44) (FUVEST 2000) Um arquivo de escritório possui 4 gavetas, chamadas a, b, c, d. Em cada gaveta cabem no máximo 5 pastas. Uma secretária guardou, ao acaso, 18 pastas nesse arquivo. Qual é a probabilidade de haver exatamente 4 pastas na gaveta a?

- a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{1}{20}$ e) $\frac{1}{30}$

45) (UFMG 2009) Dois jovens partiram, do acampamento em que estavam, em direção à Cachoeira Grande e à Cachoeira Pequena, localizadas na região, seguindo a trilha indicada neste esquema:



Em cada bifurcação encontrada na trilha, eles escolhiam, com igual probabilidade, qualquer um dos caminhos e seguiam adiante. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de eles chegarem à Cachoeira Pequena é

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{6}$

Gabarito

1 - a	2 - b	3 - c	4 - d	5 - a	6 - b	7 - b	8 -	9 - c	10 - a
11 - b	12 -	13 - c	14 - a	15 - b	16 - d	17 - c	18 - d	19 -	20 - c
21 - a	22 - c	23 - d	24 - a	25 - d	26 - a	27 - b	28 - c	29 - d	30 - a
31 - a	32 - c	33 - d	34 - b	35 - d	36 - a	37 - d	38 - a	39 - a	40 - c
41 - a	42 - b	43 - d	44 - a	45 - c					